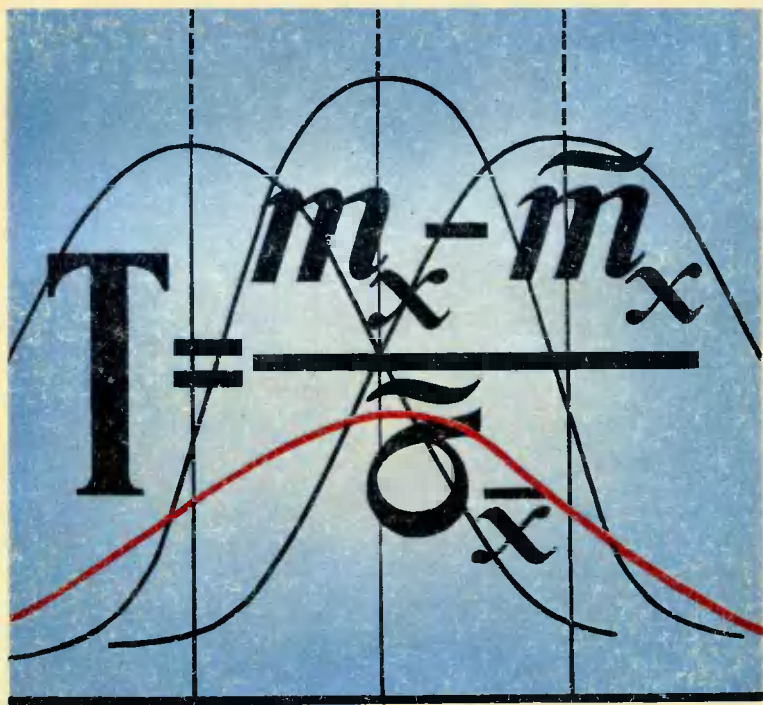


М И Р  
знаний

Б. А. КОРДЕМСКИЙ

# Математика изучает случайности



**Б. А. КОРДЕМСКИЙ**


# **Математика изучает случайности**

**Пособие для учащихся**

517.8  
К66

**Кордемский Б. А.**

**К66** Математика изучает случайности. Пособие для учащихся. М., «Просвещение», 1975.  
223 с ил. (Мир знаний).

К  $\frac{60601-658}{103(03)-75}$  210-75 

517.8

© Издательство «Просвещение», 1975 г.

## Предисловие

**В** школьных программах пока нет элементов теории вероятностей. Не очень обширен и выбор доступных школьникам книг «для чтения» по этому предмету.

Между тем многим из нас — будь то практическая или познавательная деятельность — приходится соприкасаться с многочисленными и многосторонними проявлениями стихии случайностей, постигать закономерности случайных явлений и событий.

В наше время чрезвычайно расширился спектр наук — от естественных до социальных, применяющих вероятностные и статистические рассуждения, выводы: физика, химия, биология, экономика, кибернетика, лингвистика и многие другие. Возникло много новых научных направлений, разрабатывающих приложения вероятностных методов к практике.

Цель, которую поставил перед собой автор предлагаемой книги, и состоит в том, чтобы помочь читателю самостоятельно овладеть первоначальными понятиями и методами теории вероятностей и простейшим аппаратом математической статистики.

Это — книга для познавательного чтения с карандашом в руке и рабочей тетрадью на столе.

В начальной части книги преобладает свободная форма изложения, не стесненная рамками программы, с привлечением занимательного и игрового материала; постепенно книга «серьезнеет», но не теряет доступности для учащихся

**старших классов и читателей, уже окончивших среднюю школу.**

**Для самопроверки действенности приобретенных знаний и «вероятностного мышления» в предпоследней главе предлагается около пятидесяти задач-этюдов. Некоторые доказательства, выводы и теоретические комментарии вынесены в заключительную главу «Дополнения».**

**И если с нашей книгой вас свела случайность, то пусть она уступит место устойчивому интересу, увлечению и успеху.**

**В Индии на главном подъезде одной из школ начертано:**

**«Стремись, действуй, достигай».**

**Этимися словами напутствуем и вас, читатель.**

## ИГРА СЛУЧАЯ (введение)

Случай играет в мире столь большую роль, что обыкновенно я стараюсь отвести ему как можно меньше места в уверенности, что и без моей помощи он позаботится о себе.

*А. Дюма*

**В** самом деле, мир есть закономерное движение материи, определяющее всеобщую взаимосвязанность явлений, внутреннюю сцепляемость причин и следствий, проявляющуюся в том, что в данных условиях необходимо наступает такое-то событие, а не иное.

И все же ничто не происходит без значительного или слабого вмешательства **случайности**, возникающей под воздействием непостоянных, побочных причинных связей, изменяющих ход явления при его повторении. Многочисленность и преобладание таких влияний создают «эффект случайности» — сложную, всеобъемлющую закономерность «скрытой предопределенности». Так возникают и, следовательно, объективно существуют **случайные явления** — совокупности непредсказуемых **случайных событий**.

Случайным событиям также присуща необходимость закономерного исхода, но на поверхности таких событий — случайность:

случайное событие может наступить, в тех же условиях — не наступить или происходить иначе.

Математика отвлекается (абстрагирует) от конкретной физической природы реального случайного события и рассматривает его лишь в дилемме «быть или не быть» — на-

ступит или не наступит событие в явлении, элементом которого оно является.

Основной прием изучения случайного явления — разработка его «теоретической модели» — системы суждений и заключений, позволяющих определенным образом предсказывать поведение анализируемого явления.

Появление события всегда связано с исходом явления, испытания, опыта, т. е. о ф а к т о м. В противоположность этому не появление события означает отсутствие ожидаемого факта. Но если факта нет, то не может состояться и суждение о нем. Чтобы в теоретической модели изучаемого случайного явления не было подобных «пустот», она обязательно формируется так, что при каждом осуществлении явления (хотя бы и воображаемом) наступает некоторое событие: если не наступило ожидаемое случайное событие, то это означает, что наступило его «отрицание», т. е. какое-то другое событие, предусмотренное теоретической моделью, относящееся к тому же самому явлению.

Случай (le hasard) повсюду — в явлениях живой и неживой природы, в исследовательской, профессиональной, игровой и обыденной деятельности человека. Случай — властелин успехов, неудач, событий. Но если даже властвует случайность в явлении отдельном, то и тогда в бо ль ш о й и х м а с с е неизбежно пробивается необходимость.

Пример 1. Один из видов спортивных состязаний — стрельба по мишени стрелами. Точка попадания стрелы при каждом прицельном выстреле случайна. Если же выпущено подряд несколько стрел в одну мишень, то в расположении точек попадания видна закономерность: они группируются в окрестности одной определенной точки (центра рассеяния); ближе к ней они располагаются гуще, дальше от нее — реже. Убывание густоты при этом также происходит закономерно.

Пример 2. Молекулы газа перемещаются внутри закрытого сосуда по сложным, запутанным траекториям. Удары их о стенки сосуда беспорядочны и случайны. Но если число молекул газа огромно, то в распределении давления газа по стенкам сосуда, создаваемого ударами молекул, нет ни беспорядочности, ни случайности; оно вполне закономерно (помните закон Паскаля?).

Именно массовость случайных явлений выявляет определенную, присущую им закономерность. При значительном уменьшении числа молекул газа в сосуде случайные отклонения от закономерности становятся уже ощутимыми.

**Пример 3.** Еще хитрее замаскирована случайность в поведении электронов, протонов и других элементарных частиц (микрочастиц). Атомы кристалла расположены так, что образуется естественная система «щелей» постоянных размеров с постоянными промежутками между щелями. Предположим, что удалось закрыть все щели, кроме двух соседних. Заставим электроны поодиночке вылетать из электронной пушки по направлению к щелям с одной и той же скоростью. По другую сторону щелей поставим фотопластинку.

Если бы каждый электрон двигался по законам классической механики, то, проскочив через одну из двух щелей, он и «приземлится» должен на одну определенную площадку фотопластинки.

В действительности же каждый электрон, вылетевший из электронной пушки, ведет себя настолько «беспутно», что предсказать его возможное положение на пластинке можно лишь с некоторой так называемой вероятностной оценкой шансов.

Вместе с тем для большого количества электронов, поодиночке или залпом вылетающих из электронной пушки, видна определенная и удивительная закономерность: все частицы, проникшие через две щели, располагаются не только на двух площадках фотопластинки, находящихся непосредственно против щелей, но и на многих других соседних площадках и никогда не попадают в промежутки между избранными площадками.

---

Как ни запутана, ни хитроумна игра событий, образующих случайные явления в жизни, их однородной массе свойственна тенденция к устойчивости, упорядоченности, стабильности.

Это значит, что существуют специфические закономерности, управляющие однородными массами случайных событий.

«Но где на поверхности происходит игра случайности, там сама эта случайность всегда оказывается подчиненной



внутренним, скрытым законам. Все дело лишь в том, чтобы открыть эти законы»<sup>1</sup>.

Открыть закономерность в хаосе событий, найти гармонию в стихии неопределенности, многопричинности и тоже «алгеброй поверить» — вот увлекательный и дерзновенный замысел науки о случайном.

Для решения задач, возникающих при изучении массы случайных явлений, потребовалось создание специальных методов, позволяющих глубже анализировать явления с учетом присущих им элементов случайности. Возникла и разветвилась «математика случайного» — наука, которую затем называли *теорией вероятностей*.

Теория вероятностей раскрывает объективные закономерности, присущие массовым явлениям.

Ее методы не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления, но позволяют предсказать средний суммарный результат массы однородных случайных явлений. Следовательно, зная законы, управляющие массами случайных явлений, можно добиваться в случае необходимости целенаправленного изменения хода случайных явлений, их контролирования, уменьшения, а если нужно, то увеличения их влияния на практику.

**Пример 4.** В случайные моменты времени поступают по телефону заказы на железнодорожные билеты, вызовы на АТС и станцию скорой медицинской помощи. Число заказов, вызовов, требований случайно и имеет большую амплитуду колебаний. Надо организовать ритмичную работу — без частых простоев и перенапряжений, безотказное и быстрое обслуживание населения так, чтобы абонентам, заказчикам, больным не слишком часто приходилось подолгу ждать, но и без излишков в расходах, штатах, оборудовании, количестве автомашин.

Ясно, что найти все требуемые оптимальные характеристики качества обслуживания населения невозможно без знания закономерностей систематически действующих случайных факторов, в числе которых также: терпеливость абонентов, длительность ожидания и разговоров, удаленность пострадавшего от пункта скорой помощи, длительность ожидания помощи и многие другие.

---

<sup>1</sup> К. Маркс, Ф. Энгельс. Избр. произв. т. 2, 1955, с. 371.

**Пример 5. Укрощение случая.** Али-Баба хочет попасть в пещеру с сокровищами. Перед пещерой стоит бочка, которая может вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 1). В крышке бочки имеются четыре небольших отверстия с центрами в вершинах некоторого квадрата. Под отверстиями поставлено по кувшину, в каждом из которых находится селедка хвостом вверх или вниз. Увидеть через отверстия, как расположены селедки, невозможно.

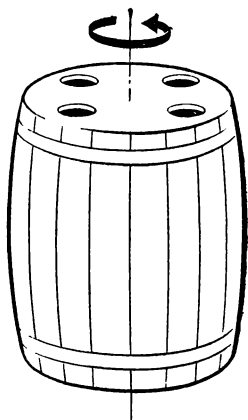


Рис. 1

Али-Баба может просунуть руки в любые два отверстия, определить положение селедок в кувшинах, расположенных под отверстиями, и изменить их положение по своему желанию.

После того как Али-Баба вытащит руки из отверстий, бочка начинает быстро вращаться, затем вновь останавливается и занимает случайное положение. Узнать те отверстия, в которые перед вращением бочки были опущены руки, невозможно.

Если хвосты селедок окажутся направленными в одну сторону, то вход в пещеру открывается, если нет, то Али-Баба может предпринять следующую попытку.

Как должен поступить Али-Баба: все предоставить воле случая или пытаться найти такую последовательность действий — алгоритм, который сумеет случай «укротить», т. е. наверняка приведет к успеху?

Чтобы обоснованно ответить на поставленный вопрос, надо знать «повадки» случая, уметь оперировать случайными событиями и величинами, словом, знать, как математика изучает случайности, чему и посвящена эта книга.

Поэтому анализ ситуации, в которой оказался Али-Баба, отодвинем на страницу 137. Что касается поисков алгоритма — системы действий, позволяющих открыть вход в пещеру при соблюдении условий игры-задачи, это — изобретательская задача, вполне посильная каждому из вас. Решите ее и сверьте результат с ответом, имеющимся на странице 142 этой книги.

Школьники — члены секции кибернетики летнего лагеря «Искатель» — даже изготовили действующую модель алгоритма этой игры-задачи.

Слава случаю. Разве не случай  
С непреложным всегда наравне...  
Случай часто событием правит,  
Порождает и радость, и боль.  
И задачу пред нами жизнь ставит!  
Как постигнуть случайности роль.

Методы познания в науке о случайном, вход в которую приоткрывает наша книга, во многом необычны. Чтение книги поэтому должно быть вдумчивым, активным, с возвращением к прочитанному и с непременными попытками самостоятельного решения задач.

«Случай всегда приходит на помощь тому, кто борется до победы» (восточная поговорка).

## ПРОИЗОЙДЕТ ЛИ СОБЫТИЕ? МЕРА НАШЕЙ УВЕРЕННОСТИ

По моему мнению, различные понятия определяются не столько словами, каждое из которых может, в свою очередь, потребовать определения, как нашим отношением к ним, которое выясняется постепенно.

*А. А. Марков*  
(«Исчисление вероятностей»)

### СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДЕНИЕ

**Турист в незнакомом городе.** Вообразите город, улицы которого, как линии тетради в клетку, одни протянулись с севера на юг, другие — с востока на запад. Турист находится в пункте *A* и намеревается пешком добраться до турбазы, расположенной в пункте *B* города. У него нет карты города, а в городе нет указателей. Впрочем, для знакомства с городом маршрут прогулки безразличен, и турист придумал: пусть случай всякий раз определяет, какое выбрать направление и сколько следует пройти кварталов в избранном направлении, прежде чем снова изменить его. Но как заставить случай давать команды?

Эврика! Туристу нужен набор так называемых случайных однозначных чисел, объединенных в пары. Тогда модуль каждого числа укажет, сколько кварталов нужно пройти туристу, а знаки определяют направления. Положительное первое число направит туриста на восток, отрицательное — на запад. Положительное второе число — на север, отрицательное — на юг.

Где же взять «случайные числа»? Заранее подготовленного набора таких чисел у туриста, конечно, нет. Но у него есть газета с таблицей номеров выигравших лотерейных билетов.

Турист наудачу выбирает часть таблицы, затем в номере каждого лотерейного билета берет две последние цифры и рассматривает их как пару случайных чисел.

| №<br>серий | №<br>билетов | Наименование<br>вещевого или<br>размер денеж-<br>ного выигрыша | №<br>серий | №<br>билетов | Наименование<br>вещевого или<br>размер денеж-<br>ного выигрыша |
|------------|--------------|--|------------|--------------|--|
| 30854      | 188*)        | 50 рублей  | 31019      | 110*) .      | 25 рублей  |
| 30856      | 054*)        | 25 рублей  | 31020      | 1—200 .      | 2 рубля  |
| 30857      | 091*)        | 100 рублей   | 31026      | 060*) .      | 25 рублей  |
| 30863      | 191*)        | 50 рублей  | 31030      | 199*) .      | 50 рублей  |
| 30878      | 135*)        | Кинокамера   | 31031      | 115*) .      | Часы «Полет»   |
| 30881      | 167*)        | 25 рублсй  | 31033      | 1—200        | 2 рубля  |
| 30899      | 004*)        | 50 рублей  | 31045      | 026*) .      | 100 рублей   |
| 30910      | 026*)        | Кастрюля   | 31047      | 101*) .      | Фотоаппарат  |
| 30945      | 171*)        | 50 рублей  | 31068      | 178*) .      | 50 рублей  |
| 30967      | 042*)        | 10 рублей  | 31069      | 100*) .      | Часы «Полет»   |
| 30970      | 145*)        | 50 рублей  | 31070      | 096*) .      | 50 рублей  |
| 31001      | 072*)        | 10 рублей  | 31072      | 147*)        | 10 рублей  |
| 31013      | 179*) .      | Фотоаппарат  |            |              |  |

Получается такой набор:

(7; 9), (1; 0), (6; 0), (9; 9), (1; 5), (2; 6), (0; 1), (7; 8), (0; 0), (9; 6).

Но нужны же и отрицательные числа, чтобы образовался «код» любого из четырех возможных направлений: восток — запад, север — юг. Можно предложить вычесть из отобранных чисел какое-нибудь фиксированное число, например 5.

При этом пара (7; 9) преобразуется в пару (2; 4), что означает: «нужно идти два квартала на восток, затем четыре квартала на север»; пара (1; 0) — в пару (—4; —5), что означает: «четыре квартала на запад и пять кварталов на юг». Набор таких пар задает туристу маршрут. «Код» случайной маршрутной линии готов:

(2; 4), (—4; —5), (1; —5), (4; 4), (—4; 0), (—3; 1),  
(—5; —4), (2; 3), (—5; —5), (4; 1), ...

В путь! Заметим, что на турбазу турист может так и не попасть; впрочем, ему достаточно оказаться в любом из соседних с турбазой кварталов — оттуда дорога ему известна. Маршрут, выбранный туристом, как видно на рисунке 2, случайно привел его к цели и оказался не очень затяжным, хотя и далеко не самым коротким — больше 66 кварталов отшагал турист, а от турбазы первоначально его отделяло всего  $15\frac{1}{2}$  кварталов.

Любопытна здесь роль случайных чисел. С их помощью мы обрели возможность имитировать (другое слово: «моделировать») реальную случайность, а именно случайность, диктовавшую туристу выбор того или иного направления.

Заметим, что, заменив числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 на —5, —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, мы «подправили» случайные

числа так, что «отрицательные» направления — юг и запад — оказались предпочтительнее (—5, —4, —3, —2, —1 — их пять из десяти) «положительных» — севера и востока (их четыре из десяти).

Внесение в создаваемую модель случайности некоторых элементов предвзятости математики к недозволенным приемам не относят.

Решение «поисковой» задачи, осуществленное туристом, является упрощенным примером применения метода математических экспериментов. «Лабораторный материал» для экспериментов — неограниченный массив случайных чисел.

Обстоятельным изучением этого метода — его еще называют методом Монте-Карло — заниматься не будем. Но возможностью экспериментального решения задач с привлечением случайных чисел воспользуемся не раз.

**Танец пылинок в солнечном луче (броуновское движение).** Смочим водой кусочек плоского стекла и капнем в воду капельку чернил. Окрашенные частицы чернил немедленно включатся в «водяную феерию» — хаотический, никогда не кончающийся танец молекул. Соударяясь, они причудливо меняют направление своего пути.

Аналогично ведут себя пылинки, что каждый из нас не раз наблюдал в полоске солнечного света.

Вот посмотри: всякий раз, когда солнечный свет проникает в наши жилища и мрак прорезает своими лучами, Множество маленьких тел в пустоте ты увидишь; мелькая, Мечутся взад и вперед в лучистом сиянии света. Будто бы в вечной борьбе они быются в сраженьях и битвах, В схватке бросаются вдруг по отрядам, не зная покоя,

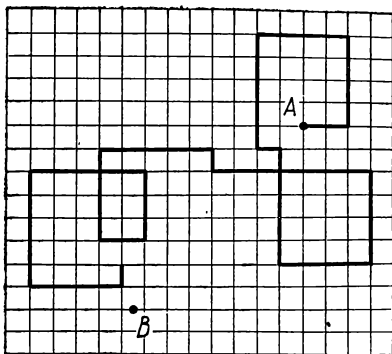


Рис. 2

Или сходясь, или врозь беспрерывно опять разлетаясь.  
Можешь из этого ты уяснить себе, как неустанно  
Первоначала вещей в пустоте необъятной метутся.

Лукреций («О природе вещей»)

Такую суматоху твердых частиц-малюток в жидкой или газовой среде называли *броуновским движением* в память о человеке, кто первым, почти 150 лет тому назад, разглядывая под микроскопом суспензию цветочной пыльцы в воде, обнаружил этот феномен природы. Имя исследователя — Роберт Броун (1773—1858). Удивленный неожиданным зрелищем, Броун первоначально предположил даже, что частицы пыльцы — живые существа. Дальнейшие эксперименты гипотезу не подтвердили, но послужили исходной опорной позицией для разработки кинетической теории газов и теории диффузии растворенных в жидкости веществ и взвешенных частиц.

Вернемся к чернильной капле на смоченном водой стекле. И здесь без специальной оптики не можем мы увидеть сложные узоры траектории отдельно взятой окрашенной частицы, тем более — предвидеть, предсказать возможные изгибы, пируэты ее беспорядочного танца. Они сложны, случайны. Но вспомним о математической модели случайного блуждания — наборе случайных чисел. По условию блуждание чернильных частиц происходит в тонком слое воды, т. е. как бы на плоскости. Поэтому, ограничиваясь лишь иллюстративной целью, поступим следующим образом.

1) Обратимся к таблице цифр, каждая из которых была «выдана» специальным устройством, обеспечивающим для всех цифр, насколько возможно, равные права на случайное появление. В небольшой выписке из такой таблицы мы расположили цифры парами.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 63 | 01 | 63 | 78 | 59 | 72 | 16 | 15 | 16 | 31 | 96 | 08 | 25 | 91 | 04 | 47 | 96 | 33 |
| 33 | 00 | 18 | 51 | 05 | 68 | 59 | 65 | 57 | 76 | 46 | 74 | 92 | 07 | 25 | 18 | 18 | 44 |
| 68 | 24 | 94 | 98 | 94 | 29 | 50 | 19 | 36 | 95 | 06 | 52 | 27 | 62 | 28 | 76 | 16 | 56 |
| 12 | 56 | 85 | 99 | 26 | 12 | 96 | 94 | 37 | 16 | 90 | 85 | 82 | 66 | 35 | 59 | 83 | 83 |
| 57 | 60 | 86 | 32 | 44 | 70 | 09 | 30 | 68 | 14 | 90 | 34 | 84 | 45 | 13 | 11 | 75 | 55 |
| 03 | 47 | 43 | 73 | 86 | 75 | 36 | 38 | 26 | 27 | 42 | 62 | 37 | 86 | 97 | 53 | 48 | 84 |
| 64 | 14 | 67 | 40 | 67 | 60 | 50 | 32 | 16 | 43 | 29 | 31 | 34 | 12 | 93 | 21 | 33 | 78 |

Выберем в этой выписке наугад две-три строки. Пусть это будут строки № 3, № 4, № 6.

2) Вычтем 5 из чисел каждой пары (чтобы иметь и отрицательные числа), получим:

«код» третьей строки:  $(1; 3)$ ,  $(-3; -1)$ ,  $(4; -1)$ ,  $(4; 3)$ ,  $(4; -1)$ ,  $(-3; 4)$ ,  $(0; -5)$ ,  $(-4; 4)$ ,  $(-2; 1)$ ,  $(4; 0)$ ,  $(-5; 1)$ ,  $(0; -3)$ ,  $(-3; 2)$ ,  $(1; -3)$ ,  $(-3; 3)$ ,  $(2; 1)$ ,  $(-4; 1)$ ,  $(0; 1)$

«код» четвертой строки:  $(-4; -3)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(3; 0)$ ,  $(4; 4)$ ,  $(-3; 1)$ ,  $(-4; -3)$ ,  $(4; 1)$ ,  $(4; -1)$ ,  $(-2; 2)$ ,  $(-4; 1)$ ,  $(4; -5)$ ,  $(3; 0)$ ,  $(3; -3)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(-2; 0)$ ,  $(0; 4)$ ,  $(3; -2)$ ,  $(3; -2)$

«код» шестой строки:  $(-5; -2)$ ,  $(-1; 2)$ ,  $(-1; -2)$ ,  $(2; -2)$ ,  $(3; 1)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(-2; 1)$ ,  $(-2; 3)$ ,  $(-3; 1)$ ,  $(-3; 2)$ ,  $(-1; -3)$ ,  $(1; -3)$ ,  $(-2; 2)$ ,  $(3; 1)$ ,  $(4; 2)$ ,  $(0; -2)$ ,  $(-1; 3)$ ,  $(3; -1)$

3) Будем считать, что теперь каждая строка имитирует в плоской системе координат траекторию каждой отдельной частицы, а каждое звено траектории будем изображать отрезком.

Поместим первую частицу в точку  $(0; 0)$ . Первая пара  $(1; 3)$  говорит о перемещении частицы на 1 единицу масштаба вправо и на 3 единицы вверх, т. е. в точку с координатами  $(1; 3)$ . Вторая пара той же строчки  $(-3; -1)$  предпи-

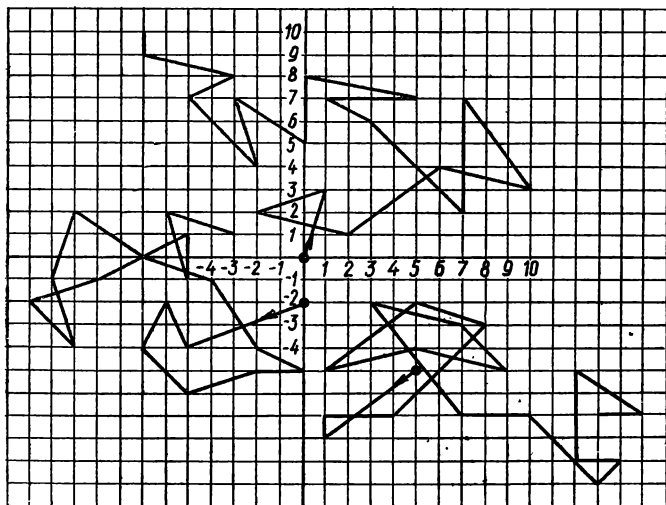


Рис. 3



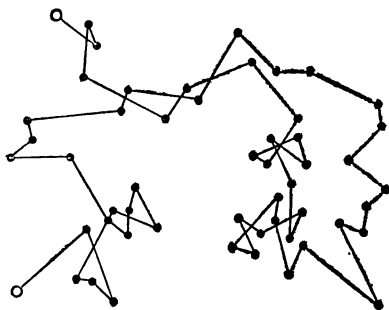


Рис. 4

сывает частице переместиться из точки (1; 3) на 3 единицы масштаба влево и на 1 единицу вниз, т. е. в точку с координатами (-2; 2) и т. д. (рис. 3).

Начальные точки маршрутов второй и третьей частиц выбираем произвольно, где-то вблизи друг от друга (как в реальной капле чернил), и далее действуем по той же схеме.

Несмотря на то что мы привлекали допущения, упрощающие реальную картину, получившаяся математическая модель броуновского движения вполне приемлемо отображает случайность в блуждании взвешенных частиц.

Взгляните для сопоставления (рис. 4), какие пируэты совершала в воде реальная частица гуммигута (опыт Перрена).

Черные точки, соединенные отрезками, — это последовательность пунктов, в которых действительно находилась частица гуммигута с промежутками в 30 секунд.

## ЧАСТИЦА В ЛАБИРИНТЕ КЛЕТОК

«По щучьему веленью, по нашему хотенью» на водной глади плоского стекла образовался «чернильный островок» (капля чернил). Без микроскопа видно, как он постепенно увеличился в размерах. Еще бы, ведь пришел в движение огромной численности «десант окрашенных частиц». И хотя случайны их водные пути-дороги, все же частицы чаще толпятся в центральной части «островка», изредка осуществляя вылазки к краям своих «владений». Такое представление возникает у нас из наблюдений за густотой окраски «островка» — густота ослабевает по направлению к его краям.

Попытаемся математическим путем дознаться, в чем тут дело.

Произведем подсчет возможных случаев перемещения частицы. При этом останемся в пределах плоскости и, как прежде, примем ряд ограничений, упрощающих предполагаемую «математическую модель».

Воспользуемся разработкой акад. А. Н. Колмогорова.

Покроем сеткой одинаковых квадратных клеток весь чернильный «островок» и предположим, что каждый случайный толчок перемещает частицу из центра занимаемой ею клетки в центр одной из соседних клеток (не расположенной по диагонали)



Назовем такое перемещение **шагом** частицы.

У частицы есть только один-единственный способ попасть в какую-либо из четырех соседних клеток. Отметим

это так: .

За два шага частица может удалиться от первоначального положения на две клетки по прямой, например , или

по ломаной, например , или она может, побывав в соседней клетке, вернуться в первоначально занимаемую клетку, например .

Перемещаясь по прямой, частица может за 2 шага удалиться одним способом в каждом из четырех направлений (рис. 5). И есть 4 клетки, в каждую из которых ведут два ломаных пути (рис. 6). Еще есть у частицы, делающей два шага, 4 способа вернуться в первоначально занимаемую

ею клетку

Полученные числовые результаты представим так, как показано на рисунке 7.

Нетрудно подсчитать, что у частицы, делающей из начального положения ровно 2 шага (получающей 2 случайных толчка), всего имеется 16 возможных различных дорог.

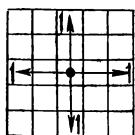


Рис. 5

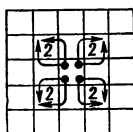


Рис. 6

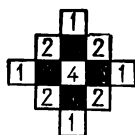


Рис. 7

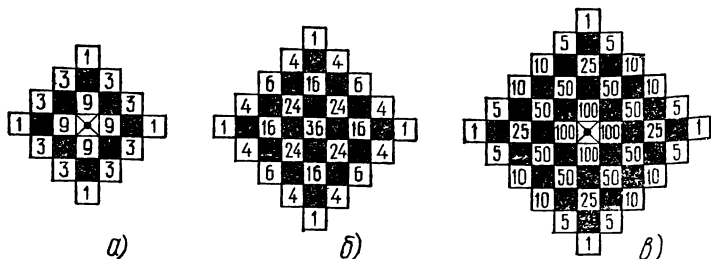


Рис. 8

Результаты подсчета возможных способов попадания частицы в каждую из доступных ей клеток после трех, а также после четырех и пяти шагов удобно представить в виде числовых схем, изображенных на рисунке 8.

Их правильность проверьте собственным подсчетом.

Подмечаем теперь, что с увеличением числа шагов частицы растет и число способов ее перемещения:

| Число шагов | 0 | 1 | 2  | 3  | 4   | 5    | ... | $k$   |
|-------------|---|---|----|----|-----|------|-----|-------|
| Число дорог | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | ... | $4^k$ |

Так выяснилось, например, что у частицы, получающей 5 последовательных толчков, имеется 1024 возможных различных дорог, каждая длиной в 5 шагов. Из них только 4 дороги оканчиваются в пунктах, наиболее удаленных от начальной клетки. В значительной части остальных возможных трасс частица на пятом шаге своего блуждания отклоняется от начального положения не очень далеко.

Будем считать, что частица, попадая в клетку, располагается в центре клетки, и вычислим, на какое расстояние отклонится частица от начального положения через 5 шагов. За единицу измерения примем сторону клетки.

Для клеток с числом 100 это отклонение  $r_1 = 1$ ; здесь — финиш 400 различных путей блуждающей частицы.

Для клеток с числом 50 отклонение  $r_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ ; здесь — финиш других 400 путей частицы.

Для клеток с числом 25 отклонение  $r_3 = 3$  — финиш 100 путей частицы.

Для клеток с числом 10  $r_4 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$  — финиш 80 путей и т. д.

Отклонения ( $r$ ) конечных положений частицы от начального удобно заменить их квадратами ( $r^2$ ). Все возможные случаи соответственно распределяются такими порциями:

| $r^2$         | 1   | 5   | 9   | 13 | 17 | 25 |
|---------------|-----|-----|-----|----|----|----|
| Число случаев | 400 | 400 | 100 | 80 | 40 | 4  |

Самостоятельно составьте аналогичные распределения возможных значений квадратов отклонений частицы от начального положения на четвертом шаге ( $k = 4$ ), на третьем ( $k = 3$ ), на втором ( $k = 2$ ).

Имеет смысл вычислить теперь среднее значение квадратов отклонений частицы от ее начального положения, полагая такое «среднее» как бы типичным представителем всей совокупности значений  $r$ , найденных для каждого заданного  $k$  — числа шагов частицы.

Принято обозначение:  $\bar{r}^2$  (черточка над буквой именно и является знаком «осреднения»).

Понятно, что при подсчете  $\bar{r}^2$  следует каждое табличное значение квадрата расстояния умножать на число случаев, реализующих соответствующее расстояние:

$$\bar{r}^2 = \frac{1 \cdot 400 + 5 \cdot 400 + 9 \cdot 100 + 13 \cdot 80 + 17 \cdot 40 + 25 \cdot 4}{1024} = 5.$$

Стоп! Обратим внимание на результат. Мы вычисляли  $\bar{r}^2$  для случая  $k = 5$  и получили  $\bar{r}^2 = 5$ . Что это: случайное или закономерное совпадение с числом шагов частицы?

Как истинные экспериментаторы-исследователи, прежде всего подсчитайте  $\bar{r}^2$  при другом числе шагов частицы: четырех, трех, двух.

Что же получилось? При  $k = 2$   $\bar{r}^2 = 2$ ; при  $k = 3$   $\bar{r}^2 = 3$ ; при  $k = 4$   $\bar{r}^2 = 4$ . Великолепно!

Впрочем, вы понимаете, конечно, что подтверждение частными примерами еще не является доказательством справедливости напрашивающегося утверждения: в нашей «модели» для всякого числа шагов  $k$  верно, что  $\bar{r}^2 = k$ .

И все же это утверждение доказуемо! В данной главе преждевременно отвлекаться на разработку соответствующего доказательства.

Заметим попутно, что размерность  $\bar{r}^2$  — среднего значения квадратов отклонений частицы — является квадратом размерности отдельных отклонений  $r_1, r_2, \dots$ . Для устранения этого неудобства вводят еще одно характеристическое число — корень квадратный из вычисленного среднего значения квадрата отклонения; в нашей «модели» это будет  $\sqrt{k}$ .

Корень квадратный из среднего значения квадрата отклонения называют *средним квадратическим*.

Обозначим среднее квадратическое буквой  $\lambda$ , тогда для каждого натурального значения  $k$   $\lambda = \sqrt{k}$ .

В частности, при  $k = 5$   $\lambda = \sqrt{5}$ .

Закономерность, подмеченная на модели блуждания частицы в лабиринте клеток, конечно, любопытна, но согласуется ли она с реальным броуновским движением взвешенных в жидкости частиц?

### «НА КОНЧИКЕ ПЕРА»

В физике, да и других науках о материальном мире, известны случаи открытий, сделанных учеными «на кончике пера», т. е. сначала рассчитанных математически, а потом уже подтвержденных наблюдениями, опытами. Именно так — теоретически — исследовал броуновское движение А. Эйнштейн в одной из статей начального периода своей научной деятельности (в 1905 г.).

В теоретическом исследовании невозможно учесть все многообразие фактов реальной картины такого сложного физического явления, каким является беспорядочное движение большого количества блуждающих в жидкости частиц. В статье А. Эйнштейна в качестве исходных допущений упоминаются такие два:

1) каждая отдельная частица движется независимо от остальных частиц;

2) движения одной и той же частицы в разные промежутки времени должны рассматриваться как независимые, пока эти промежутки остаются не слишком малыми.

Но в реальном броуновском движении число возможных трасс частицы не сосчитать, поэтому объектами теоретиче-

ских исследований являются лишь отклонения частиц. *Отклонением* мы условились называть расстояние от финиша частицы до места ее начального расположения.

Отклонение от начальной точки, в ближайшей окрестности которой реальная частица находилась одновременно с совокупностью других частиц, определяется взаимодействием многих случайных влияний. Величина отклонения отдельной частицы принимает значения по произволу случая. Это случайная величина. Каждая частица подвергается нецеленаправленной случайной бомбардировке молекулами жидкости, т. е. получает толчки не в одном, а в разных направлениях. Поэтому, например, вдвое более длительное воздействие случайных сил совсем не обязательно в таком же отношении изменяет и значение отклонения каждой частицы.

Объяснить здесь методы вычислений, примененные Эйнштейном, не представляется возможным. Но результат вычислений интересен своей неожиданной простотой.

Оказывается, для любого промежутка времени ( $t$ ) сумма квадратов отклонений, следовательно, также и среднее значение квадратов отклонений ( $\bar{r}^2$ ) частиц от их общего старта пропорционально этому промежутку времени:

$$\bar{r}^2 = k \cdot t.$$

Разумеется  $k$  здесь — не «число шагов», а коэффициент пропорциональности ( $k$  равно удвоенному коэффициенту диффузии).

Такую «норму» поведения «в среднем» теория предписывает множеству частиц. А реальные частицы «в жизни» так себя ведут?

Представьте — да! Все подтвердили «туфельки» — класс инфузорий. Наблюдая беспорядочный их бег в капле воды, установили: сумма квадратов перемещений пропорциональна протекшему промежутку времени.

Если  $\bar{r}^2 = k \cdot t$ , то среднее квадратическое отклонение

$$\lambda = \sqrt{\bar{r}^2} = \sqrt{k \cdot t} = k_1 \sqrt{t} \quad (k_1 = \sqrt{k}).$$

Оно также увеличивается во времени и тоже пропорционально, но не промежутку времени  $t$ , а  $\sqrt{t}$ . Так что удвоение  $\lambda$  — среднего квадратического отклонения частиц, соответствующего промежутку времени  $t$ , — будет происходить «в среднем» за вчетверо более длинный отрезок

времени. Действительно, чтобы удвоить значение корня квадратного, надо учетверить подкоренное выражение.

Теперь мы знаем, чем измерить производ случайности:

|| в реальном блуждании множества частиц:  $\lambda = k_1 \sqrt{t}$ ,  
|| в упрощенной модели реального процесса:  $\lambda = \sqrt{k}$ .

Согласитесь, что обнаруженное сходство в закономерностях не может не восхитить!

На рассмотренном примере броуновского движения и упрощенной модели блуждания частиц по плоскости мы видим, как наряду с произволом, господствующим в проявлении отдельной случайности, большой их совокупности присущи четкие, простые, так называемые статистические, закономерности, вскрываемые математической наукой о случайном.

А упрощенные математические модели при изучении сложных явлений применяют и в серьезных научных исследованиях.

### **БЫТЬ ИЛИ НЕ БЫТЬ ЧАСТИЦЕ В КРУГЕ?**

Всякий раз, отправляясь в рейс, частица вступает в «мир» возможных событий-фактов, каждый из которых способен «быть или не быть» исходом в конце маршрута. Это мир случайных событий, и, чтобы нам в нем не заблудиться, мы сами устанавливаем его «размер» (формируем определенную систему событий) и объявляем «свод законов»-допущений, действующих в этом сформированном мире.

Вернемся к схеме расположения конечных пунктов блуждающей частицы, каждый рейс которой — 5 шагов (см. рис. 8, в).

Число всех возможных различных маршрутов частицы — исходов рейса — нам известно: 1024. Это случайные события. Пусть они и образуют систему избранных событий в том смысле, что ничто, происходящее вне системы этих событий, не принимается во внимание.

В каждом рейсе частица обязательно осуществляет один маршрут — любой из 1024. Отметим это как одно из обязательных свойств системы избранных событий: в рассматриваемом явлении (рейс частицы) одно из событий системы становится осуществившимся фактом; короче: событие наступило, появилось.

Очевидно также, что осуществление частицей двух маршрутов в одном рейсе исключено. И это отметим как еще одно свойство системы избранных событий: появление одного из событий системы исключает совместное с ним появление другого.

Чтобы случайное событие стало объектом математики, надо оценить его шансы на появление, знать меру возможности его появления в сравнении с мерой возможности появления любого другого из той же системы.

Есть 1024 маршрута. Каковы шансы каждого из них на то, что именно он будет избран частицей, совершающей рейс? Ну, хотя бы, одинаковы ли их шансы? Это сокровенная тайна случая, ее знать никому не дано. В неопределенности ответа на этот вопрос — и сущность, и прелесть случайности, и даже причина неисчерпаемого многообразия свойств природы.

В случае принципиальной неопределенности ответа на поставленный вопрос кажется естественным допустить, что случай все же ведет честную игру, не делая привилегий, так сказать ни за что, ни про что, каким либо событиям из выделенных в единую систему, поэтому доверимся предположению о равных шансах на появление для каждого маршрута.

При этом допущении получается для каждого маршрута в одном рейсе соотношение шансов 1 к 1023: 1 шанс за то, что частица изберет задуманный нами маршрут, и 1023 шанса за то, что частица изберет не этот маршрут.

Скажем иначе. Есть 1024 маршрута — совокупность *равновозможных* случайных событий. Это значит, что у каждого из маршрутов одна и та же «мера готовности» к тому, чтобы произойти, которую вполне исчерпывающе выражает дробь  $\frac{1}{1024}$ . Заменим слова «мера готовности»

одним словом «вероятность» и скажем, что число  $\frac{1}{1024}$  есть вероятность осуществления частицей любого из 1024 равновозможных маршрутов в каждом ее рейсе.

Задумаем еще какое-нибудь событие, связанное с маршрутами частицы (с совокупностью избранных событий).

Сначала выпишем в виде таблицы все отличающиеся друг от друга возможные значения отклонения конечных пунктов от начальной клетки вместе с суммарным количе-



ством маршрутов, оканчивающихся в соответствующих пунктах:

| $r$             | 1   | $\sqrt{5}$ | 3   | $\sqrt{13}$ | $\sqrt{17}$ | 5 |
|-----------------|-----|------------|-----|-------------|-------------|---|
| Число маршрутов | 400 | 400        | 100 | 80          | 40          | 4 |

Задумаем событие: «частица удалилась максимально далеко (отклонение  $r = 5$ )»; обозначим это событие буквой  $A$ . Как определить вероятность события  $A$ ?

Возможны 4 маршрута, финиш которых имеет отклонение  $r = 5$ . Скажем еще так: появлению события  $A$  благоприятствуют 4 случая из 1024 равновозможных. Поэтому естественно считать, что вероятность события  $A$  в 4 раза больше вероятности одного маршрута и, следовательно, равна  $4 \cdot \frac{1}{1024} = \frac{1}{256}$ . Это же число можно получить как

отношение числа случаев, благоприятствующих событию  $A$  (4 маршрута), к числу всех равновозможных случаев (1024 маршрута).

Помните, мы вычислили среднее квадратическое для  $k = 5$  и получили  $\lambda = \sqrt{5}$ . Какова вероятность того, что частица, завершив рейс, отклонится от начального пункта не далее чем на величину  $\lambda = \sqrt{5}$ ?

Построим окружность с центром в начальном пункте рейса частицы и радиусом  $r = \sqrt{5}$ . Рисунок 9 или данные таблицы показывают, что внутри образовавшегося круга оканчивается 800 маршрутов (около 80% от всего числа маршрутов). Вычисляем вероятность интересующего нас события. Она равна  $\frac{800}{1024} \approx 0,8$ . Вероятность того, что

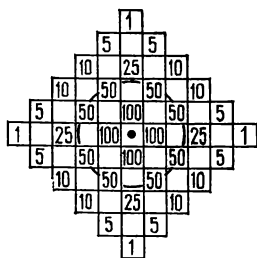


Рис. 9

частица в конце пути окажется вне этого круга, равна  $\approx 0,2$  (проверьте!).

Для самостоятельного решения. Установить аналогично: «быть или не быть» частице, делающей  $k$  шагов, в круге радиуса  $r = \sqrt{k}$  при  $k = 3, 4, 6$ ?

Увеличивается или уменьшается вероятность события «быть» при возрастании числа шагов частицы от  $k = 3$  до  $k = 6$ ?

А теперь вспомните наш разговор о чернильной капле и густо окрашенном круглом пятнышке. Пятнышко расплывается, но с постепенным замедлением роста его радиуса. Этот факт, как показывают результаты, полученные с помощью модели блуждания частицы по плоскости, имеет несомненную связь с тем, что у каждой окрашенной частицы вероятность быть в круге радиуса  $r = \sqrt{t}$  значительно выше вероятности выскочить из него ( $t$  — промежуток времени от момента появления чернильной капли в тонком слое воды).

### ФОРМУЛА ДЕЙСТВИЙ

Идея числовой оценки шансов на случайный успех, на выигрыш, на появление ожидаемого события «стара, как мир», но силу метода, научной теории она обрела впервые не многим более чем 300 лет назад, когда в короткой переписке, возникшей в 1654 г. между Блезом Паскалем и Пьером Ферма, были высказаны мысли, давшие начало «Математике случайного».

Из письма Паскаля: «Я более не сомневаюсь в правильности полученного мною результата, так как он удивительным образом совпадает с найденным Вами. Как я вижу, истина одна: и в Тулузе, и в Париже».

Тогда в Тулузе жил Ферма, в Париже — Паскаль, а друг с другом так и не встретились ни разу.

В последующие полтора столетия по трассе зародившейся науки о вероятностях пролегли классические исследования знаменитых математиков и физиков того времени: Христиана Гюйгенса и Якоба Бернулли, Абрахама де Муавра и Пьера де Лапласа<sup>1</sup>. В 1657 г. была издана первая книга по теории вероятностей. Эта книга, написанная Гюйгенсом, считалась образцовой вплоть до начала XVIII в.

Определились основные понятия теории, терминология, принципы вычисления вероятности события. Формулу действий для решения «вероятностных» задач четко изложил Лаплас:

«Теория случайности состоит в том, чтобы свести все однородные события к известному числу равновозможных

---

<sup>1</sup> Паскаль Б. (1623—1662), Ферма П. (1601—1665), Гюйгенс Х. (1629—1695), Бернулли Я. (1654—1705), Муавр Ж. (1667—1754), Лаплас П. (1749—1827).

случаев, т. е. таких, существование которых для нас было бы одинаково неопределенно, и определить число случаев, благоприятствующих явлению, вероятность которого отыскивается. Отношение этого числа случаев к числу всех возможных случаев и есть мера этой вероятности, которая, таким образом, и есть не что иное, как дробь, числитель которой есть число всех благоприятных случаев, а знаменатель — число всех возможных случаев».

«Стратегию» Лапласа (так назовем ее условно) полезно расчленить на три последовательно решаемые задачи.

**Первая.** Выявить состав совокупности исключающих друг друга равновозможных случаев-исходов, возникающих в процессе, явлении, опыте, связанном с рассматриваемыми событиями.

**Вторая.** Установить, как велика эта выявленная совокупность.

**Третья.** Сосчитать, какую долю всех случаев-исходов составляют случаи, благоприятствующие рассматриваемому событию.

При этом о вероятности какого-либо события, не имеющего отношения к системе обусловленных исходов, не может быть и речи.

Наиболее внимательные из вас, конечно, подметили и уязвимое звено «стратегии» Лапласа: она действует только в системе равновозможных случаев, но как установить равновозможность и обязательно ли она присуща всем исходам?

При выявлении состава совокупности исходов (задача первая) по необходимости приходится несколько упрощать (идеализировать) реальную картину исходов явления, прибегая к правдоподобным, целесообразным допущениям, естественно вытекающим из свойств реального мира, например, из свойства симметрии.

Симметрия в природе — это и геометрическая симметрия предметов, и различного рода однородность, например однородность материала.

В широком смысле симметрия — с о х р а н е н и е каких-либо элементов по отношению к определенным изменениям, например сохранение массы при превращениях вещества. Принцип симметрии господствует в теоретической физике.

Пример симметрии в алгебре: сохранение вида и смысла системы уравнений при циклической перестановке не-

известных (если это так, то систему называют симметричной относительно неизвестных).

Правильно составленную систему уравнений можно понимать как исходную математическую модель условия задачи. Своевременно обнаруженная симметрия «модели» определенным образом влияет на ход решения системы. Вспомните возможный прием «мгновенного» отыскания действительных неизвестных, удовлетворяющих, например, такой симметричной системе:

$$\begin{cases} 3x^3 + y^3 + 2z^3 = 48, \\ x^3 + 2y^3 + 3z^3 = 48, \\ 2x^3 + 3y^3 + z^3 = 48. \end{cases}$$

Неизвестные  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в системе исполняют одинаковую роль: циклическая перестановка неизвестных нисколько не меняет систему; в этом ее симметрия. Следовательно, если система имеет единственное решение (есть способы это выяснить), то только такое, когда неизвестные равны одно другому. Предполагая, что  $x = y = z$ , получаем  $6x^3 = 48$ ,  $x^3 = 8$ ,  $x = y = z = 2$ .

Точно так же проявление симметрии в системе случайных событий-исходов физического явления состоит в сохранении «равноправия» одного исхода по отношению к другому, в их равновозможности.

**Пример.** Подброшены три монеты. Каждая монета после «приземления» оказывается вверх гербом или цифрой. Интересуемся системой двух событий:

(А) — появилось четное число гербов;

(В) — появилось четное число цифр.

Требуется «вынести приговор о равновозможности» этих событий.

Что должно быть основой «приговора»? Субъективные суждения вида «мне кажется», «я так хочу» наука решительно отвергает. С другой стороны, суждение о равновозможности случайных исходов физического явления средствами математики недоказуемо. Значит, наш «приговор о равновозможности» может быть лишь следствием рассуждений, правдоподобно оценивающих влияние симметрии в упрощенных (идеальных) условиях.

Рассуждаем о симметрии выделенных исходов подбрасывания трех монет. У «правильной» монеты (в идеале — однородной по массе и цилиндрической по форме) герб и цифра взаимозаменяемы. Это ведет к симметрично-

сти событий ( $A$ ) и ( $B$ ) в том смысле, что перестановка слов «гербов» и «цифр» не меняет сущности системы этих событий.

Так у нас образовались весомые основания для убежденности в правдоподобии предположения о равновозможности событий ( $A$ ) и ( $B$ ). В дальнейшем принятие равновозможности определенных исходов-событий будем часто, когда нет очевидных противопоказаний, считать неявно формулированным элементом условия задачи.

Любопытно, что в микромире электронов, протонов и других так называемых элементарных частиц принцип симметрии оказался далеко не всегда приемлемой опорой для принятия гипотезы о равновозможности исходов. Подробнее об этом и о том, как тернист и драматичен путь науки к распознаванию закономерностей и строения микромира, увлекательно рассказала В. А. Черногорова в книге «Загадки микромира» (1973 г.).

### СЧИТАЕМ ВЕРОЯТНОСТИ

**З а д а ч а 1.** На рисунке 10 показана схема параллельного соединения двух пар выключателей. Каждый выключатель оказывается случайно включенным (+) или выключенным (—). При некотором произвольно взятом состоянии выключателей ток либо проходит от точки  $A$  к точке  $B$ , либо не проходит. Какова вероятность, что ток проходит?

В арсенале средств решения задачи у нас есть пока только одна «стратегия» — прямое, непосредственное вычисление вероятности события, связанного с системой равновозможных случаев. Ток проходит, например, при таком состоянии четырех выключателей:  $\begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}$ , а при таком состоянии:  $\begin{pmatrix} - & + \\ + & - \end{pmatrix}$  — не проходит.

Изобразите остальные возможные исходы-состояния четырех выключателей в виде аналогичных «матриц», содержащих плюсы — минусы. Сколько всего получилось случаев?

Другой, «теоретический» способ подсчета. Комбинируя два состояния выключателя  $\textcircled{1}$

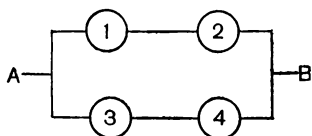


Рис. 10

(включен, выключен) с двумя возможными состояниями вы-

ключателя (2), получаем  $2 \cdot 2 = 2^2$  состояний двух выключателей. Комбинируя их с двумя состояниями выключателя (3), получаем  $2^2 \cdot 2 = 2^3$  состояний трех выключателей и, наконец, комбинируя эти 8 состояний с двумя состояниями выключателя (4), получаем  $2^3 \cdot 2 = 2^4 = 16$  состояний четырех выключателей.

Выделим из них случаи, благоприятствующие событию «ток проходит». В трех случаях  $\begin{pmatrix} + & + \\ - & + \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}$  ток проходит только участок (1)–(2). Если в этих «матрицах» поменять местами верхние и нижние строки, то получим три случая, когда ток проходит только участок

(3)–(4). Еще один случай  $\begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$ , когда ток проходит оба участка. Всего 7 случаев. Теперь по классической формуле: вероятность события (A) — «схема проводит ток» — равна  $\frac{3+3+1}{16} = \frac{7}{16}$ .

Можно отметить также, что имеется 9 состояний из шестнадцати, при которых схема не проводит ток. Это событие следует назвать противоположным событию A и обозначить символом  $\bar{A}$ . Вероятность события  $\bar{A}$  равна  $\frac{9}{16}$ .

Полезно заметить, что всегда сумма вероятностей события A и ему противоположного события  $\bar{A}$  равна 1.

Для самостоятельного решения аналогичной задачи предлагаются еще две схемы из четырех выключателей (рис. 11).

Каждый выключатель, как и в предыдущей схеме, случайно включен или выключен. По здравому смыслу у системы последовательного соединения выключате-

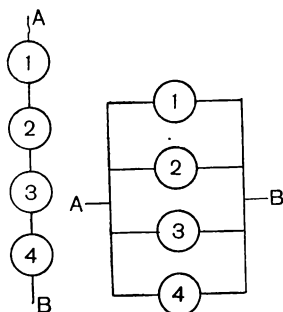


Рис. 11

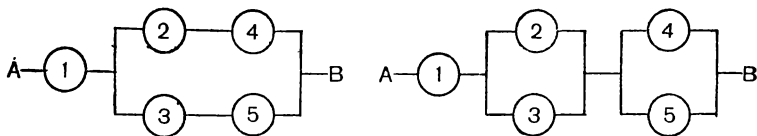


Рис. 12

лей имеется больше шансов, чем у второй и предыдущей систем, оказаться в случайном состоянии, не проводящем ток от  $A$  к  $B$ .

Подтвердите это утверждение вычислением соответствующих вероятностей.

Вероятности случайного состояния каждой из следующих двух схем (рис. 12), пожалуй, не сравнишь без вычислений.

Определите, какая из схем имеет больше шансов предотвратить случайное включение тока?

**Задача 2.** В книжном магазине стоят 4 барабанчика с билетами книжной лотереи. В каждом осталось по 4 билета. Никто не знает, сколько из них с выигрышем. Но для задачи будем полагать известным точно, что в каждом барабанчике находится один билет с выигрышем и три — «пустых».

Некто решил вынуть из каждого барабанчика по билету. Какова вероятность, что в образовавшемся у него комплекте из четырех билетов хотя бы один с выигрышем?

Наш Некто рассуждал так:

— Вероятность вынуть из барабанчика билет с выигрышем равна  $\frac{1}{4}$ . (Это его утверждение следует считать верным.)

— Так как я вынимаю по одному билету из четырех барабанчиков, то вероятность вынуть хотя бы один билет с выигрышем увеличивается в 4 раза. Получается  $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$ ,

следовательно, я непременно выигрываю. (Неправильность такого результата очевидна, но суть ошибки в этих рассуждениях мы поймем несколько позже, когда изучим правила, по которым, зная вероятности одних событий, можно вычислить вероятности других событий. В нашем распоряжении пока одна стратегия — тщательный подсчет всех равновозможных исходов и выделение из их совокупности тех случаев, которые благоприятствуют задуманному событию.)

Три «пустых» билета, содержащихся в каждом барабанчике, перенумеруем и обозначим буквами  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ , а билет с выигрышем — буквой В. Комплект из четырех вынимаемых билетов формируется случайным образом. Возможны, например, такие четверки билетов:

$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (\Pi_1, \Pi_1, \Pi_1, \Pi_1) \end{matrix}$      $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_1, \Pi_1) \end{matrix}$      $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (\Pi_1, В, \Pi_1, \Pi_3) \end{matrix}$      $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (\Pi_1, В, В, В) \end{matrix}$  и т. д.

Это значит: в один комплект попали из каждого барабанчика «пустые» билеты № 1; в другой комплект — из первого, третьего и четвертого барабанчиков «пустые» билеты № 1, а из второго — «пустой» № 2; в третий комплект — из первого и третьего барабанчиков «пустые» № 1, из второго — билет с выигрышем, а из четвертого барабанчика «пустой» № 3 и т. д.

Совокупность всех допустимых комплектов и будем считать системой равновозможных, несовместных случаев.

Вычислим, сколько их всего? Каждый билет из первого барабанчика может быть в паре с каждым билетом из второго барабанчика. Таких пар  $4 \cdot 4 = 4^2$ . К каждой из этих пар может присоединиться билет из третьего барабанчика. Образуется  $4^2 \cdot 4 = 4^3$  троек билетов, и, наконец, каждую тройку может доукомплектовать билет из четвертого барабанчика, что дает окончательное количество случаев в совокупности:  $4^3 \cdot 4 = 4^4$ .

Нас интересует событие (А): «В комплекте из четырех билетов содержится хотя бы один с выигрышем». Этому событию благоприятствуют комплекты, содержащие по одному билету с выигрышем, и те комплекты, которые содержат по 2, по 3 и по 4 билета с выигрышем. Подсчитать число всех таких комплектов нелегко. В подобных ситуациях целесообразно обратиться к противоположному событию, т. е. к событию, являющемуся отрицанием события А.

Противоположное событие ( $\bar{A}$ ), очевидно, таково: «Комплект состоит из четырех «пустых» билетов». Число случаев, благоприятствующих этому событию ( $\bar{A}$ ), установить проще. Достаточно вычислить число комплектов, содержащих по одному билету, из трех «пустых» билетов каждого из четырех барабанчиков. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к числу  $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ .



Теперь ясно, что интересующему нас событию (А) благоприятствуют  $4^4 - 3^4$  случаев и его вероятность равна:

$$\frac{4^4 - 3^4}{4^4} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{175}{256} \approx 0,7.$$

Как видим, вероятность (0,7) вынуть из четырех барабанчиков хотя бы один билет с выигрышем, конечно, больше вероятности (0,25) вынуть из одного барабанчика билет с выигрышем, но не в 4 раза, а менее чем в 3 раза.

Мала вероятность вытащить все 4 билета с выигрышем. Действительно, этому событию благоприятствует всего лишь один случай  $\overset{1}{В} \overset{2}{В} \overset{3}{В} \overset{4}{В}$ , следовательно, вероятность этого события равна

$$\frac{1}{256} \approx 0,004.$$

Пожалуй, теперь уместно рассказать об одном давнем эпизоде из жизни французских школьников.

На уроке математики учитель предложил задачу: «Каждая девочка нашего класса попадает в мишень один раз из четырех. Какова вероятность, что четыре девочки из нашего класса, стреляя одновременно, поразят мишень?»

— Это ясно, — сказал Пьер, — одна-то из них наверняка поразит мишень. Учитель: — Иди к доске, Пьер, и напиши 25 раз: *La théorie de probabilité n'est que le bon sens confirmé par le calcul.* (Marquise de Laplace.)

(Теория вероятностей — не что иное, как здравый смысл, подтвержденный вычислениями. — *Маркиз де Лаплас.*)

Чтобы избежать участи Пьера, отнеситесь с должным вниманием к словам Лапласа и к содержанию сформулированной учителем задачи.

Неспроста она упомянута нами вслед за задачей о лотерейных билетах, вынимаемых из барабанчика. Немного находчивости и... решение задачи готово: вероятность поражения мишени такова же, как и вероятность вынуть хотя бы один билет с выигрышем, т. е.  $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4 \approx 0,7$ .

В самом деле, утверждение о попадании в мишень одним выстрелом из четырех в переводе на язык «схемы барабанчиков» означает, что в каждом барабанчике есть 4 билета, из которых один — с выигрышем. Условие —

«каждая из четырех девочек делает один выстрел по мишеню» — эквивалентно операции вынимания по одному билету из четырех барабанчиков.

Чтобы поразить цель, достаточно лишь одной девочке из четырех попасть в мишень. В «схеме барабанчиков»: в комплекте из четырех вынутых билетов достаточно иметь один с выигрышем. Такова наша догадка.

Вообще в поисках решения «вероятностной» задачи почаще мобилизуйте свою догадку.

Между прочим, Я. Бернулли одну из лучших своих работ по теории вероятностей озаглавил *Ars conjectandi* — Искусство предположений (догадок).

### ОПРЕДЕЛИТЕ СВОЮ ПОЗИЦИЮ

На полке стоят 6 одинаковых закупоренных банок: 3 с зеленой краской и 3 с красной (рис. 13). Не глядя на наклейки, наугад снимаем с полки 3 банки. Сколько шансов за то, что эти банки содержат краску одного цвета (или «з», или «к»). Какова вероятность этого события?

Судя по тому, что было сказано в этой книге до сих пор, надо образовать систему равновозможных случаев и выделить случаи, отвечающие требованию задачи (благоприятствующие задуманному событию). Остальное — просто.

Попытка решения № 1. Комплект из трех банок, снятых с полки, может содержать:

а)  $\begin{bmatrix} \text{З} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{З} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{З} \end{bmatrix}$   
Зз

б)  $\begin{bmatrix} \text{К} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{К} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{К} \end{bmatrix}$   
Зк

в)  $\begin{bmatrix} \text{З} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{З} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{К} \end{bmatrix}$   
2з+1к

г)  $\begin{bmatrix} \text{К} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{К} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{З} \end{bmatrix}$   
2к+1з

Два случая удовлетворяют требованию, два остальных — нет, следовательно, отношение шансов «за» и

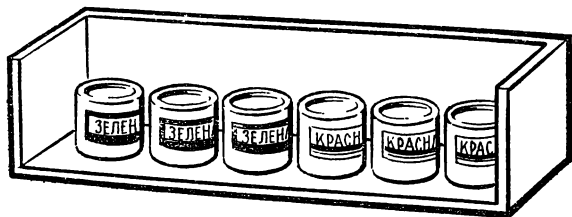


Рис. 13

«против» 1 : 1; вероятность события А: «Зз, или Зк» равна:  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

Значит, решили задачу? Погодите-ка, а чем хуже иная система равновозможных случаев?

П о п ы т к а р е ш е н и я № 2. Раздвинем банки на полке: 3 налево и 3 направо. При этом могло так случиться, что:

а) слева оказались 3 банки одного цвета, справа — другого — один благоприятствующий случай;

либо краски разъединились не поровну — два неблагоприятствующих случая, а именно:

б) слева на одну банку больше «з», чем «к»;

в) слева на одну банку больше «к», чем «з».

Отношение шансов «за» и «против»: 1 : 2; вероятность события равна  $\frac{1}{3}$ .

Какое построение системы равновозможных случаев кажется более обоснованным? Первое? Второе? А может быть естественнее третья модель предполагаемых исходов?

П о п ы т к а р е ш е н и я № 3. Возможны 8 комбинаций трех банок из шести:

а) 

|   |
|---|
| з |
|---|

|   |
|---|
| з |
|---|

|   |
|---|
| з |
|---|

б) 

|   |
|---|
| з |
|---|

|   |
|---|
| з |
|---|

|   |
|---|
| к |
|---|

в) 

|   |
|---|
| з |
|---|

|   |
|---|
| к |
|---|

|   |
|---|
| з |
|---|

г) 

|   |
|---|
| з |
|---|

|   |
|---|
| к |
|---|

|   |
|---|
| к |
|---|

д) 

|   |
|---|
| к |
|---|

|   |
|---|
| з |
|---|

|   |
|---|
| з |
|---|

е) 

|   |
|---|
| к |
|---|

|   |
|---|
| з |
|---|

|   |
|---|
| к |
|---|

ж) 

|   |
|---|
| к |
|---|

|   |
|---|
| к |
|---|

|   |
|---|
| з |
|---|

з) 

|   |
|---|
| к |
|---|

|   |
|---|
| к |
|---|

|   |
|---|
| к |
|---|

Имеем 2 шанса в пользу задуманного события и 6 — против. Отношение шансов: 1 : 3; вероятность события А равна:  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ .

Продолжая «изобретение» совокупностей равновозможных случаев, можно предложить и такое решение данной задачи, при котором получается отношение шансов 1 : 9 или вероятность задуманного события равна 0,1. Соответствующий способ рассуждений (№ 4) оставим пока в секрете, может быть это ваши соображения, если вы не согласны с каким-либо из трех предложенных выше?

Какое же одно число более других (наиболее объективно) характеризует степень нашей уверенности в том, что три произвольно выбранные банки содержат краску одного

цвета:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{10}$ , или какое-либо иное? Обдумайте свою позицию по этому вопросу. По мере дальнейшего продвижения в штудировании книги ваша позиция либо утвердится, либо выявится ее несостоятельность.

Если хотите, можете поставленный вопрос «обернуть» для себя строфой стихотворения нашего соотечественника, молдавского поэта Л. Дамиана (в переводе Л. Васильевой):

Истина мягка и жестока,  
Истина далеко-далека!  
Я ищу ее, бегу вослед.  
Я ее настигну или нет?

### НЕ НАДЕЯСЬ НА «АВОСЬ»

В качестве «поощрения» за участие в предыдущей полустуливой мистификации с якобы различными вероятностями одного и того же события предлагается вашему вниманию игра-состязание разума и случая.

Найдите в своих детских игрушках 4 одинаковых кубика (или склейте из плотной бумаги) и раскрасьте их четырьмя красками так, как показано на рисунке — каждая грань окрашена одной краской.

На рисунке 14 в поверхности каждого куба сделаны вырезы, чтобы была видна окраска всех шести граней.

В результате вы получите для себя и друзей увлекательную конструктивную головоломку: складывая кубики столбиком, составить параллелепипед  $1 \times 1 \times 4$  так, чтобы на каждой его боковой грани были представлены все 4 цвета.

Условия задачи позволяют считать для определенности, что при составлении параллелепипеда снизу ставим кубик

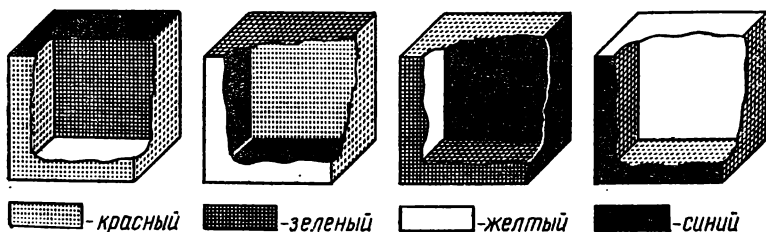


Рис. 14

№ 1, на него — кубик № 2 и далее по порядку — кубики № 3 и № 4. Если при этом будем ставить кубик на кубик, не думая о совпадении или несовпадении расцветок граней, т. е. «на авось», то как велика вероятность удачи?

Проведем рассуждения. Каждый кубик можно поставить двадцатью четырьмя способами (возможно 6 разных верхних граней и в каждой такой позиции каждая из четырех боковых граней может быть передней гранью). Комбинируя ориентации всех четырех кубиков, получаем  $24^4$  конструкций. Но готовый параллелепипед имеет 4 ориентации (любая его боковая грань может быть передней). Это уменьшает предыдущий результат в 4 раза. Получается  $24^4 : 4 = 82\,944$  возможных различных параллелепипедов.

Расцветка граней подобрана так, что в этой большой совокупности возможных параллелепипедов непременно есть один, удовлетворяющий требованию нашей конструктивной головоломки, и, кроме него, есть еще один, который получается из первого поворотом каждого кубика на  $180^\circ$  так, что его передняя и задняя грани остаются теми же, а верхняя и нижняя грани каждого кубика меняются местами. В остальных 82 942 конструкциях условие четырехцветности всех боковых граней параллелепипеда соблюдено не будет.

Следовательно, складывая кубики наугад, необдуманно, пожалуй, «удачи не видать» — вероятность ее очень мала:

$$\frac{2}{82944} = \frac{1}{41472} \approx 0,000025.$$

На практике обдуманные действия, конечно, увеличивают шансы на успех, и все же добиться желаемого нелегко. Пробуйте!

Решение самой головоломки не приводим — добудете самостоятельно.

### **МНИМАЯ ЗАГАДОЧНОСТЬ В ПОВЕДЕНИИ ТРЕХ ИГРАЛЬНЫХ КУБИКОВ**

Это — знакомые нам по многим детским играм кубики с точками на гранях, указывающими число очков. Три таких кубика («три кости») подбрасывают над столом и затем считают сумму очков на верхних гранях.

Сколько различных исходов возможно для одного подбрасывания трех кубиков? И одинаковы ли у всякой суммы от наименьшей ( $1 + 1 + 1$ ) до наибольшей ( $6 + 6 + 6$ ) шансы на появление?

Возникновение интереса к решению этой задачи теряется в веках. Первые попытки подсчета отделены от нас почти на 1000 лет. В X — XI в. сочинялись даже поэмы, в которых каждому возможному исходу при бросании трех игральных костей посвящался определенный стих. Авторы поэм полагали, что есть всего 56 исходов, поэтому и стихов в поэме было столько же. Но подсчеты, «воспетые» в одной из поэм XIII в. (De Vetula), приводят к другому результату — к числу 216.

Каждый кубик может показать на верхней грани одно из шести чисел: 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Комбинируя 6 расположений одного кубика с шестью расположениями второго, получим  $6 \cdot 6 = 36$  соединений по два числа, например, таких: 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 2,1; 2,2 и т. д. Комбинируя 36 расположений двух кубиков с шестью расположениями третьего, получим  $36 \cdot 6 = 216$  соединений по 3 числа в каждом, например, таких: 1,1,1; 1,1,2; 1,1,3; ...; 1,1,6; 1,2,1; 1,2,2; 1,2,3 и т. д.

Долго — вплоть до исчерпывающего решения проблемы Галилеем<sup>1</sup> — длилось заблуждение игроков в «три кости» при сравнении шансов на появление в одном броске таких, например, сумм, как  $S = 9$  и  $S = 10$ . Казалось, что шансы в точности одинаковы, так как три кубика формируют 6 троек чисел, каждая из которых образует сумму 9 —

(6;2;1), (5;3;1), (5;2;2), (4;4;1), (4;3;2), (3;3;3)

и столько же формируют троек чисел с суммой 10 —

(6;3;1), (6;2;2), (5;4;1), (5;3;2), (4;4;2), (4;3;3).

Догадываетесь, что упущено в этих подсчетах?

Положим, для удобства рассуждений, что после броска кубики легли в ряд: какой-то оказался левым (безразлично, который из трех), какой-то — средним и какой-то — правым. Возьмем три р а з н ы х числа, сумма которых 9, например (5;3;1), и согласимся эту запись понимать как

---

<sup>1</sup> Г а л и л е й (1564—1642) был первым, кто дал полное решение этой теоретической задачи, имеющей многовековую историю. Но соответствующая работа Галилея была опубликована лишь в 1718 г.

«код» такого случая: «левый кубик показал число 5, средний — 3, правый — 1». Пусть показания среднего и правого кубиков обменялись (произошла перестановка элементов в тройке чисел). Появился «код» (5;1;3). Он является записью комбинации из прежних трех слагаемых, но характеризует новую ориентацию кубиков: левый кубик по-прежнему показывает 5, а средний — не 3, а 1, правый — не 1, а 3. Повторение операции перестановки элементов той же тройки чисел в конечном счете определяет еще 4 новых ориентации: (1;5;3), (1;3;5), (3;1;5), (3;5;1). Получилось 6 различных формаций для одного комплекта трех различных слагаемых. Всего в наборе шести троек, образующих сумму 9, есть 3 комплекта с различными элементами. И это дает нам  $3 \cdot 6 = 18$  возможных случаев появления суммы 9.

Рассмотрим комплекты троек, содержащих два одинаковых числа. Возьмем, например, (5;2;2). Здесь перестановка среднего и правого чисел не образует новой ориентации: как и до перестановки, средний кубик показывает 2 и правый показывает 2. Изменения в ориентации кубиков произойдут только при обмене местами левого и среднего чисел: (2;5;2), а затем — среднего и правого: (2;2;5). Получилось 3 формации для одного комплекта трех слагаемых, из которых два — одинаковых. Всего в наборе шести троек, образующих сумму 9, есть 2 комплекта с двумя одинаковыми элементами. И это добавляет нам  $2 \cdot 3 = 6$  возможных случаев появления суммы 9.

При трех одинаковых элементах в тройке чисел, например для комплекта (3;3;3), перестановки не создают различающихся расположений кубиков и, следовательно, возможен только один случай.

Подсчитаем теперь общее число случаев, благоприятствующих появлению суммы 9:

$$18 + 6 + 1 = 25.$$

Аналогичный подсчет числа случаев, благоприятствующих появлению суммы 10, дает иной результат:

$$3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 27.$$

Такое же количество случаев характерно для суммы  $S = 11$ .

Убедитесь!

Все эти случаи входят в состав 216 возможных исходов.

Как видим, у суммы 10 не намного, а все же больше шансов на появление, чем у суммы 9. Если кубики «честные» (идеально правильной формы, однородные по изготовлению, и условия кидания одинаковы), то при большом числе киданий трех кубиков наблюдение более частого, в среднем, появления суммы 10 (или 11) вполне закономерно.

Когда действительно имело место такое поведение кубиков, то оно казалось загадочным для тех, кто считал одинаковыми шансы на появление сумм 9 и 10.

## ЧТО ОЗНАЧАЕТ ЗНАК ВОСКЛИЦАНИЯ?

При подсчете числа случаев, благоприятствующих появлению события «выпало 9 очков», пришлось попутно решать задачу комбинирования трех различных элементов в виде последовательностей. Например, из чисел 5, 3 и 1 удалось составить 6 комбинаций, отличающихся только порядком следования чисел: (5;3;1), (5;1;3), (3;5;1), (3;1;5), (1;5;3), (1;3;5).

Каждый способ расположения заданного комплекта различных элементов в последовательность называется *перестановкой*.

Для подсчета вероятности события собственно нет нужды в непосредственном осуществлении всех перестановок. Достаточно установить лишь возможное число их. Как это сделать?

Возьмем сначала набор из трех элементов ( $A; B; C$ ) и еще набор из четырех элементов ( $A; B, C; D$ ). Применим прием постепенного формирования последовательностей. На первое место претендуют три элемента в примере № 1 и четыре элемента в примере № 2.

Пример № 1

$A \ B \ C$  — 3 случая.

Пример № 2

$A \ B \ C \ D$  — 4 случая.

В каждом случае примера № 1 на второе место претендуют два оставшихся элемента или три оставшихся элемента в примере № 2; это дает соответственно  $3 \cdot 2$  и  $4 \cdot 3$  случаев.

Пример 1

1-е место



2-е место

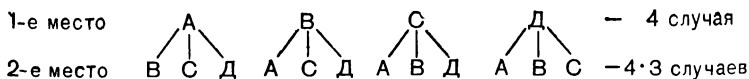


— 3 случая

—  $3 \cdot 2$  случаев

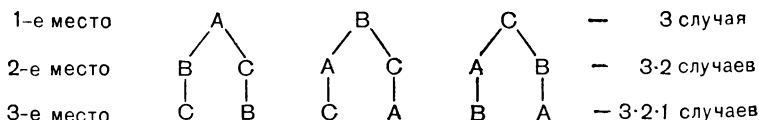


### Пример 2



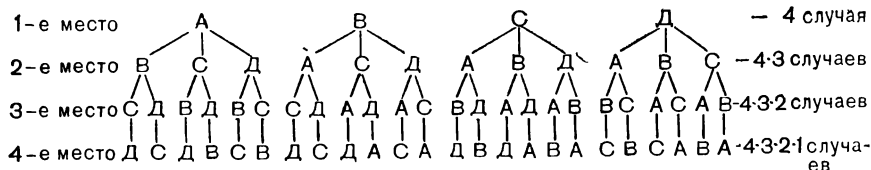
В каждом из  $3 \cdot 2$  случаев примера № 1 третье место занимает единственный оставшийся элемент; при этом определилось окончательное число перестановок:  $3 \cdot 2 \cdot 1$ ; такое произведение обозначают символом  $3!$  (3 с восклицательным знаком) и говорят: «три факториал»;  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

### Пример 1



В каждом из  $4 \cdot 3$  случаев примера № 2 на третье место претендуют два оставшихся элемента, поэтому имеющееся число случаев удваивается и становится равным  $4 \cdot 3 \cdot 2$ ; четвертое место в каждом из  $4 \cdot 3 \cdot 2$  случаев естественно занимает оставшийся элемент, что не изменяет образовавшегося числа перестановок —  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ; такое произведение обозначают символом  $4!$  и говорят: «четыре факториал»;  $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ .

### Пример 2



Из двух элементов  $A$  и  $B$  можно образовать две перестановки:  $AB$  и  $BA$ . Так как  $2 = 2 \cdot 1$ , то и в этом случае пригоден символ  $2!$  — «два факториал»;  $2! = 2 \cdot 1$ .

Один элемент сам себе — «перестановка» с одним элементом на первом месте. В этом смысле и понимают символ  $1!$ ;  $1! = 1$ .

Распространяя примененный прием рассуждений на случай набора, состоящего из  $n$  элементов, получаем правило, позволяющее сразу вычислить число всех возможных

перестановок: число перестановок, которые можно образовать из  $n$  различных элементов, равно произведению первых  $n$  натуральных чисел:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \quad (n! \text{ читается: «эн факториал»}).$$

Кто знаком с принципом «математической индукции», может провести формальное обоснование этого правила.

**З а д а ч а.** На шести одинаковых по форме и размеру карточках написаны буквы слова ТАЛАНТ — по одной букве на каждой карточке. Карточки брошены в мешок и тщательно перемешаны. Затем их вынимают наудачу и располагают на столе одну за другой в порядке появления. Какова вероятность снова получить слово Т А Л А Н Т или какое-либо другое осмысленное слово?

Прежде всего найдите все осмысленные слова, какие могут быть составлены из данных шести букв: А, А, Л, Н, Т, Т.

**П о д с к а з к а:** кроме слова талант есть еще два слова.

Начинать решение надо с выяснения «размера» совокупности избранных случаев. Очевидно, это — число перестановок из шести карточек. Хотя есть одинаковые буквы, но каждая имеет свое индивидуальное гнездо-карточку, поэтому целесообразно карточки занумеровать:

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| А | А | Л | Н | Т | Т |

Шесть карточек, значит,  $6! = 720$  способов расположить их по порядку. Такова же совокупность всех возможных случаев.

Слово Т А Л А Н Т не изменится, если буквы А поменяют местами, но по расположению карточек получается иная комбинация: Т А Л А Н Т. Если в каждой из этих двух комбинаций то же проделать с буквой Т, то получим еще две различные комбинации карточек с сохранением слова Т А Л А Н Т. Значит, появлению слова Т А Л А Н Т благоприятствуют  $2 \cdot 2 = 4$  случая из 720 возможных.

Очевидно, таким же количеством благоприятствующих случаев определяется появление каждого из остальных двух осмысленных слов (а все же, какие это слова?).

Следовательно, вероятность появления осмысленного слова равна  $\frac{12}{720} = \frac{1}{60}$ .

Проделайте такое испытание 60 раз. Сколько было удач? Может быть одна, может быть больше, чем одна, а может быть и ни одной. Наш расчет прогнозирует только то, что при многократном повторении испытания и хорошем перемешивании карточек на каждые 60 испытаний в среднем нас ждет одна удача.

Для самостоятельного решения. В мешок брошено 5 букв: А, А, Г, М, М. Их вынимают по одной и располагают в порядке появления. Докажите, что вероятность появления какого-либо осмысленного слова из этих пяти букв равна  $\frac{1}{15}$ .

### МНОЖЕСТВО СОБЫТИЙ, НАЗЫВАЕМОЕ ПРОСТРАНСТВОМ

Подготовительный этап нашего проникновения в науку о случайном пройден. Он показал, что материалом для установления начальных понятий теории вероятностей являются случайные исходы, результаты некоторого испытания, опыта. Выполняется ли испытание фактически или мы его лишь воображаем повторяющимся любое число раз при неизменных условиях, безразлично для построения теории; теория вероятностей создает и анализирует его теоретическую модель. Такая модель не обязана учитывать все физически возможные исходы рассматриваемого испытания, а только заранее обусловленные — существенные для теории и ее приложений.

**Пример.** При действительном или воображаемом бросании монеты условливаемся считать появление герба или цифры единственным возможным исходом для построения теоретической модели этого опыта, хотя может оказаться и так, что монета встанет на ребро или укатится прочь.

Пусть условия, определяющие случайные результаты некоторого испытания, дают нам основание установить систему из  $n$  возможных исходов  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Будем предполагать при этом, что в результате каждого осуществления испытания наступает один и только один из этих  $n$  исходов. Выражение «один и только один» надо понимать так: один из  $n$  исходов непременно наступает в

результате испытания, но никакие два из них не могут наступить совместно, т. е. появление одного исхода в данном испытании исключает возможность появления другого в том же испытании.

Все эти обусловленные, взаимоисключающие (несовместные) исходы рассматриваемого испытания будем называть *элементарными событиями*.

Множеству (совокупности) *всех* элементарных событий присваивается наименование *пространство элементарных событий* (ПЭС).

При этом сами элементарные события называются точками этого пространства.

Например, при построении модели бросания одной монеты объявим выпадение герба и выпадение цифры элементарными событиями и ПЭС составим из двух элементарных событий (из двух точек).

Произвольный набор из элементарных событий рассматривается как одно событие. Можно сказать и так: произвольное подмножество множества элементарных событий также называется событием.

В опыте с бросанием одного игрального кубика ПЭС естественно образуется из шести элементарных событий:  $E_1$  — выпало одно очко,  $E_2$  — выпало два очка, ...,  $E_6$  — выпало 6 очков. Любое другое событие, которое может произойти в опыте с бросанием кубика, появляется тогда и только тогда, когда наступает какое-нибудь из этих элементарных событий.

Например, появление события  $A$  — «выпало четное число очков при однократном бросании кубика» — означает, что наступило либо событие  $E_2$  (выпало 2 очка), либо  $E_4$  (выпало 4 очка), либо  $E_6$  (выпало 6 очков). Таким образом, набор (подмножество) трех элементарных событий ( $E_2, E_4, E_6$ ) является событием  $A$  — «четное число очков». Можно еще сказать и так: элементарные события  $E_2, E_4, E_6$  благоприятствуют событию  $A$ .

Вообще, некоторое элементарное событие  $E$  благоприятствует событию  $A$ , если последнее наступает при появлении элементарного события  $E$ .

Объясните (для самопроверки), почему в опыте с бросанием кубика событие  $A$  — «четное число очков» — нельзя было бы «обусловить» как элементарное и тем самым довести ПЭС до семи элементарных событий.

Пусть монета подбрасывается дважды. Это испытание имеет только следующие несовместные исходы: (Г Г) — «оба раза выпал герб», (Г Ц) — «сначала — герб, потом — цифра», (Ц Г) — «сначала — цифра, потом — герб», (Ц Ц) — «оба раза выпала цифра». Эти 4 исхода могут претендовать на то, чтобы их принять за элементарные события.

Рассмотрим еще три события, имеющие отношение к двукратному подбрасыванию монеты:

событие  $A$  — «монета оба раза упала одной стороной»; относительно уже принятого ПЭС оно составное, так как появление события  $A$  означает, что наступило одно из двух элементарных событий: либо (Г Г), либо (Ц Ц);

событие  $B$  — «в двух бросаниях монеты цифра выпала не более двух раз»; это событие не может не произойти, так как, какое бы из четырех элементарных событий ни появилось, это всякий раз означает, что произошло событие  $B$ ; назовем такое событие *достоверным*;

событие  $C$  — «в двух бросаниях монеты цифра выпала более двух раз» — не может произойти в данном испытании; его появлению не благоприятствует ни одно из четырех элементарных событий; назовем такое событие *невозможным*.

Вообще набор, состоящий из всех элементарных событий, является *достоверным событием*, т. е. таким, которому благоприятствует каждое из элементарных событий. Достоверное событие будем обозначать символом  $\Omega$  (буквой «омега»).

Невозможному событию не благоприятствует ни одно элементарное событие. Поэтому невозможное событие принято понимать как «пустое» (нулевое) множество элементарных событий; обозначается оно символом  $\emptyset$ . Невозможное событие, очевидно, никогда не произойдет.

Все введенные понятия: «событие», «элементарное событие», «пространство элементарных событий» — являются первоначальными неопределяемыми понятиями теории вероятностей.

Формирование теоретической модели изучаемого явления, опыта обычно начинается с установления подходящего пространства элементарных событий (ПЭС). При этом на установление количества точек, образующих ПЭС, иногда воздействуют некоторые специальные физические соображения, допущения или сущность решаемой задачи. Заме-

тим попутно, что могут быть веские основания, не позволяющие считать все элементарные события равновероятными.

**Пример 1.** Пусть имеется набор предметов, однородных по некоторому признаку, например набор деталей, внешне одинаковых, среди которых есть бракованные. Ясно, что, как бы ни были похожи детали одна на другую, они физически различимы; каждой можно, скажем, присвоить порядковый номер и обозначить буквами  $b_1, b_2, b_3, \dots$  — бракованные и  $d_1, d_2, \dots$  — доброкачественные.

Положим для определенности, что в наборе деталей содержатся 3 бракованные и 2 доброкачественные. Из этого набора наудачу берем две детали. Возможно, что ими окажется пара бракованных № 1 и № 2 ( $b_1 b_2$ ), а может быть бракованная № 1 окажется в сочетании с иной бракованной — № 3 ( $b_1 b_3$ ). Очевидно, оба эти исхода — ( $b_1 b_2$ ) и ( $b_1 b_3$ ) — следует считать двумя событиями, несовместными в одном опыте. Продолжая сочетать парами бракованные детали, затем доброкачественные, затем — бракованные с доброкачественными, в конце концов получим десять событий:

$$(b_1 b_2), (b_1 b_3), (b_2 b_3), (d_1 d_2), (b_1 d_1), \\ (b_1 d_2), (b_2 d_1), (b_2 d_2), (b_3 d_1), (b_3 d_2),$$

полностью определяющих исходное пространство элементарных событий ( $\Omega$ ) для рассматриваемого опыта.

Однако для того же опыта возможно образовать и другую теоретическую модель с иными событиями, принимаемыми в качестве элементарных, если условиться не различать все бракованные детали между собой и все доброкачественные детали между собой. В соответствии с таким условием появление любой пары бракованных деталей — одно элементарное событие ( $bb$ ), появление пары доброкачественных изделий — одно элементарное событие ( $dd$ ) и появление любого сочетания ( $bd$ ), состоящего из любой бракованной детали и одной доброкачественной — еще одно элементарное событие. Так образуется вторая теоретическая модель рассматриваемого опыта, в которой ПЭС ( $\Omega$ ) содержит не десять точек, как в первой модели, а только три:

$$\Omega = (bb, dd, bd).$$

**Пример 2.** Люди, едущие в лифте, распределяются по этажам здания и для установления ПЭС можно этих

людей различать или не различать в зависимости от смысла решаемой задачи.

Формирование ПЭС состоит либо в составлении полного перечня событий, принимаемых за элементарные, либо в установлении их количества («объема» пространства). Простейшие ПЭС содержат конечное число  $n$  точек:

$$\Omega (E_1, E_2, \dots, E_n).$$

### ТРИ ОСНОВНЫХ ПОСТУЛАТА

**Первый шаг** в построении математической модели реального опыта — выделение множества или пространства элементарных событий ( $\Omega$ ). ПЭС должно быть таким, чтобы любое событие, связанное с данным опытом, либо было элементарным, либо как-то «составлялось», из элементарных событий (было их «набором»).

Полагая, что для каждого случайного события объективно существует специфическая мера возможности его появления в данном опыте, называемая *вероятностью события*, мы сами для себя формируем гипотезу (делаем правдоподобное предположение) о численном значении вероятности каждого элементарного события. И в этом состоит **второй шаг** конструирования математической модели реального опыта.

Заметим сразу, что «вероятность события» является понятием, также относящимся к категории первичных, неопределяемых понятий. Это безразмерная величина, предназначенная в некотором смысле служить «мерой случайности» события, характеризовать степень его близости к достоверному событию. Естественно поэтому прежде всего условиться, каким числом «наделить» достоверное событие в качестве его вероятности. Соответствующее соглашение является общепризнанным и его называют *постулатом*.

**Постулат 1.** Удобно условиться достоверному событию ( $\Omega$ ) приписывать вероятность, равную 1, а невозможному событию ( $\emptyset$ ) вероятность  $\rightarrow 0$ .

Будем вероятность всякого события  $A$  обозначать символом  $P(A)$  (иногда  $P_A$ , или просто  $p$ ), тогда

$$P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$$

Очень легко установить вероятность каждого элементарного события  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , если принять гипотезу от-

носителем их «равновозможности» (как во всех предыдущих задачах). Мы просто каждому элементарному событию припишем (поставим в соответствие) число

$$\frac{1}{n}$$

в качестве его вероятности

$$P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_n) = \frac{1}{n}.$$

Предположение об одинаковой вероятности элементарных событий и служит выражением того, что все они «равновозможны».

Но вот в опыте «единственный выстрел по мишени» ПЭС естественно образуют два элементарных события:  $E_1$  — попал в мишень,  $E_2$  — не попал в мишень. Стрельба прицельная и любой из нас, заранее оценивая вероятности событий  $E_1$  и  $E_2$  в соответствии с мастерством стрелка и условиями стрельбы, раздробил бы единицу, очевидно, не на равные доли; может быть, например, так:  $P(E_1) = 0,99$  и  $P(E_2) = 0,01$ .

Возможность более гибкого подхода к предугадыванию вероятностей, объективно присущих каждому элементарному событию, предусмотрена еще одним постулатом.

*П о с т у л а т 2. С каждым из  $n$  событий  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , образующих пространство элементарных событий ( $\Omega$ ), связано число  $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$ , называемое вероятностью этого события. Эти числа неотрицательны и таковы, что*

$$P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = 1.$$

Как видно, для конкретного выбора числовых значений вероятностей, априорно приписываемых элементарным событиям, остается произвол. Для теории в этом нет никакого ущерба, так как математическая теория вероятностей занимается вычислением вероятностей различных событий только при определенных допущениях. Но и в практических приложениях устанавливают значения  $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$ , конечно, не наобум, а стараясь объективно оценить шансы каждого элементарного события на возможность его появления в данном испытании.

В частности, на практике, составляя вероятностную модель условия задачи, часто удается построить ПЭС таким,



чтобы можно было с достаточным основанием полагать элементарные события равновероятными. Помните, как удалось нам это при создании упрощенной вероятностной модели блуждания чернильных частиц по плоскости? Мы тогда даже нашли математическое оправдание наблюдаемой физической картине замедленного «размывания» границ окрашенного пятна. Рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Несколькими страницами раньше рассматривался опыт двукратного бросания монеты, все четыре исхода которого ( $E_1, E_2, E_3, E_4$ ) были приняты в качестве  $\Omega$ . Вполне правдоподобно допустить, что все они равновозможны и, значит,

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}.$$

Аналогично при  $k$  бросаниях монеты выявляется, как легко установить самостоятельно,  $2^k$  возможных несовместных исходов. Полагая их пространством элементарных равновозможных событий, мы и здесь как бы опираемся на условия и свойства, позволяющие считать неизбежным, что вероятность каждого элементарного события равна  $p = \frac{1}{2^k}$ .

**Пример 2.** Вернемся к построению модели случайного выбора двух любых деталей из комплекта, содержащего 3 бракованные и 2 доброкачественные детали (с. 45).

Вспомним, что, полагая детали различимыми, мы выявили 10 несовместных исходов, из которых можно образовать пространство элементарных событий ( $\Omega$ ). Вполне оправданно допуская их равновозможность, мы закончим построение модели тем, что соотнесем всем им одинаковую вероятность, выраженную числом 0,1.

Далее, полагая бракованные детали неразличимыми и доброкачественные детали неразличимыми, мы наметили другую теоретическую модель того же опыта. Состав ПЭС оказался сокращенным до трех событий

$$E_1 = (бб), E_2 = (дд), E_3 = (бд).$$

По здравому смыслу не следует предполагать их равновозможными. Действительно, не все физически существенные условия появления этих элементарных событий одинаковы. У события (бб) есть возможность появиться как бы в трех состояниях: ( $б_1б_2$ ) — это (бб), и ( $б_1б_3$ ) — это (бб),

и  $(б_2б_3)$  — это  $(бб)$ , а у события  $(дд)$  — в одном:  $(д_1д_2)$ . У события  $(бд)$  — в шести состояниях. Учитывая это, разумно положить

$$P(E_1) = 0,3, P(E_2) = 0,1, P(E_3) = 0,6.$$

Но, если бы какие-либо специальные соображения или гипотезы, исходящие все же не из субъективных суждений, побудили нас признать эти три элементарных события  $E_1 = (бб)$ ,  $E_2 = (дд)$ ,  $E_3 = (бд)$  равновероятными, то мы спокойно восприняли бы это как еще одну — иную — теоретическую модель, где в отличие от предыдущей

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}.$$

Постулат 2 определил, образно говоря, «наставление для присуждения вероятностей» элементарным событиям. Еще одно «наставление» нужно для «присуждения вероятностей» составным событиям — подмножествам, элементами которых являются те или иные элементарные события. Об этом скажет третий — последний — постулат.

**Постулат 3.** Вероятность  $P(A)$  случайного события  $A$  есть сумма вероятностей элементарных событий, составляющих событие  $A$ .

Из постулатов 1, 2 и 3 следует, что для любого события  $A$

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Полезно иметь в виду, что каждому событию  $A$  противопоставляется другое событие, определяемое условием «событие  $A$  не произошло». Оно определяется множеством всех тех элементарных событий, которые не благоприятствуют событию  $A$ , и называется событием, *противоположным* событию  $A$ ; обозначается символом  $\bar{A}$ .

Из принятых постулатов следует, что для взаимно противоположных событий  $A$  и  $\bar{A}$  имеет место равенство

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Пусть  $\Omega$  содержит  $n$  элементарных событий, для которых принимается гипотеза равновероятности; тогда вероятность каждого элементарного события равна  $\frac{1}{n}$ . Если при этом какое-либо событие  $A$  определяется набором,

содержащим  $m$  элементарных событий, то в силу постулата 3 имеем:

$$P(A) = \frac{1}{n} \cdot m = \frac{m}{n}.$$

При этом условии все элементарные события иногда называют *случаями*. Если  $n$  — число всех равновозможных случаев, а  $m$  — число случаев, благоприятствующих появлению события  $A$ , то  $P(A)$  удобно вычислять по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

**Пример 3.** Идеализируя геометрическую симметрию и однородность реального игрального кубика, мы получаем объективное право принять допущение о равновероятности всех шести исходов, составляющих ПЭС в опыте с бросанием кубика (см. с. 43). В этом случае  $n = 6$  и вероятность каждого элементарного события равна  $\frac{1}{6}$ .

Какова в этом опыте вероятность события  $A$  — «выпавшее число очков простое»? Так как составному событию  $A$  благоприятствуют три элементарных события ( $E_2 = 2$ ,  $E_3 = 3$ ,  $E_5 = 5$ ), то  $m = 3$  и по формуле получаем  $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

### КОНТУРЫ «РЕШАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА»

«Наставления», содержащиеся в трех постулатах, определяют контуры схемы вычисления вероятности какого-либо обусловленного задачей события ( $A$ ).

1. Исходя из описания «источника» случайных событий-исходов, составить ПЭС, содержащее достаточное количество «точек», полностью определяющих задуманное событие ( $A$ ).

2. На основе правдоподобных рассуждений выдвинуть гипотезу, «наделяющую» вероятностью каждое элементарное событие (постулаты 1, 2).

Следует предпочесть такое ПЭС, которое состояло бы из равновозможных событий (систему случаев).

3. Точно установить, с какими элементарными событиями совместно появляется задуманное событие ( $A$ ),

и на основании постулата 3 в ы ч и с л и т ь искомую вероятность.

Если ПЭС составлено из равновероятных событий, то для вычисления вероятности задуманного события ( $A$ ) достаточно знать число всех элементарных событий ( $n$ ) и число ( $m$ ) элементарных событий, благоприятствующих появлению задуманного события ( $A$ ). Тогда  $P(A) = \frac{m}{n}$ .

По этой схеме возможно пока только «арифметическое» вычисление вероятности задуманного события с выявлением всех благоприятствующих случаев. Из следующей главы узнаем, как совершенствуется схема решения с привлечением «алгебры событий».

### КОНФЛИКТНЫЕ СИТУАЦИИ

**Первая.** При совместных поездках на своем автомобиле брат и сестра кидали монету, чтобы решить, кому быть водителем. Ясно, что шансы были одинаковыми для каждого.

Однажды сестра предложила новые условия брату:

— Ты будешь кидать одну монету, а я две. Я выиграю, если у меня выпадет больше гербов, чем у тебя.

Брат согласился, но сестра-бедняга почему-то все-таки не стала чаще, чем прежде, сидеть за рулем машины. Что скажет теория по этому поводу? Может быть, следует предложить брату подкидывать, например, 10 монет, а сестре — 11? Такой жребий повысит ее шансы?

**Вторая.** Вторая их забава — игральный кубик. Кидают по одному разу и условились считать победителем того, кто выбросил больше очков.

Обычно первой бросала кубик сестра, хотя чаще от этого не выигрывала. Однажды она выполнила остроумный и в общем-то правильный расчет и пришла к выводу, что для нее вероятность выигрыша меньше  $\frac{1}{2}$ .

— Вероятность того, что мы оба выбросим одинаковое число очков равна  $\frac{1}{6}$  — рассуждала сестра. — Следовательно, вероятность того, что число очков не будет одинаковым, равна  $\frac{5}{6}$ . Половина этого числа дает вероятность

того, что я выброшу больше очков, чем брат, а это дает только  $\frac{5}{12}$ , что меньше  $\frac{1}{2}$ . Не увеличатся ли мои шансы на выигрыш, если я буду бросать кубик после брата? Что мы ей ответим?

**Р е ш е н и е.** Для внесения ясности в первую конфликтную ситуацию рассмотрим все возможные случаи, полагая их равновероятными:

| У сестры | гг | гц | цг | цц |  | гг | гц | цг | цц |
|----------|----|----|----|----|--|----|----|----|----|
| У брата  | ц  | ц  | ц  | ц  |  | г  | г  | г  | г  |

Только в четырех случаях из восьми у сестры гербов больше, чем у брата, следовательно, шансы выиграть остаются равными у сестры и у брата.

Убедитесь самостоятельно в том, что вероятность выигрыша остается равной  $\frac{1}{2}$  для любого количества  $n$  монет, подбрасываемых братом, и  $n + 1$  монет, подбрасываемых сестрой.

Внесем ясность во вторую конфликтную ситуацию. Она изложена так, что поневоле вовлекает нас в анализ рассуждений, выполненных сестрой.

Первое же высказывание сестры: «Вероятность того, что мы оба выбросим одинаковое число очков, равна  $\frac{1}{6}$ » — молчаливо опирается на исходное предположение о равновероятности выпадения любого возможного числа очков при всяком повторении подбрасывания кубика, следовательно, на предположение о независимости шансов на выигрыш от очереди бросать кубик.

Так и должна была ответить сестра на свой вопрос, прежде чем приступила к вычислению вероятностной оценки шансов на выигрыш. Ее решение изящно, но дополним его небольшой подробностью:

половину от  $\frac{5}{6}$  составляет не только вероятность того, что она выбросит больше очков, чем брат, но равным образом и вероятность того, что она выбросит меньше очков,

чем брат. Следовательно, для каждого из них вероятность выигрыша равна вероятности проигрыша и равна

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}; \quad \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$$

и еще  $\frac{1}{6}$  — вероятность ничьей (равное число очков).

### ЗА КУЛИСАМИ СВОЕНРАВНОГО СЛУЧАЯ

Случайное событие не предсказуемо точно — на то оно и случайное. Образно говоря, случай своенравен — не придерживается какой-либо «системы в игре». Поэтому не эфемерна ли надежда обнаружить некую закономерность, регулярность в его проявлениях?

Математика исследует события, возникающие в ситуациях, допускающих не только мыслимую, но и действительно осуществимую многократную повторяемость одинаковых и независимых друг от друга испытаний, в каждом из которых по капризу случая наступает или не наступает рассматриваемое событие. Именно многочисленные наблюдения, накопленные практикой, и являются истоками нашей убежденности в том, что каждое случайное событие обладает объективно присущей ему вероятностью.

Пусть в серии  $n^*$  действительно осуществленных испытаний событие  $A$  появилось  $m^*$  раз. Вычислим отношение  $\frac{m^*}{n^*}$ , обозначим его символом  $P^*(A)$  и назовем *относительной частотой события  $A$*  в данной серии испытаний:

$$\| P^*(A) = \frac{m^*}{n^*}.$$

Обратите внимание: *вероятность события* вычисляется, говоря по-латыни, а priori, т. е. до осуществления испытания, в котором ожидается появление этого события, а *относительная частота события* вычисляется a posteriori, т. е. после завершения какой-либо короткой или длинной серии повторных испытаний. «И что не дано вывести a priori, то, по крайней мере, можно получить a posteriori, т. е. из многократного наблюдения результатов в подобных примерах»<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Из книги Бернулли Я. «Искусство предположений».

Возьмите монету, подкиньте ее 10 раз и считайте, сколько раз она упадет гербом вверх (событие  $A$ ). Пусть это случилось 7 раз, тогда  $P^*(A) = 0,7$ . Если же событие  $A$  произошло 2 раза, то  $P^*(A) = 0,2$ . (У вас сколько?) Такие результаты не показательны — слишком короткие серии бросков. Подбросьте монету 100 раз, еще лучше — повторите испытание 10 раз по 100 бросков в каждом. А может быть отважитесь бросить монету 4040 раз, как это сделал Бюффон? (XVIII в.).

Пирсон (XIX в.) таким же способом заглянул «за кулисы случая», повелевавшего монете упасть гербом или цифрой 12 000 и даже 24 000 раз. Впрочем, пощадим свое время — применим современную, усовершенствованную технологию намеченного эксперимента: обратимся еще раз к таблице случайных чисел. В десятичной системе счисления однозначные числа (0, 1, ..., 9) разделяются поровну на четные и нечетные и появление в таблице случайных однозначных чисел каждого четного числа, включая 0, — такая же «игра случая», как, скажем, выпадение герба при подбрасывании монеты. Следовательно, вместо осуществления длительной процедуры стократного подбрасывания монеты достаточно просмотреть сто однозначных чисел любого «отрезка» таблицы случайных чисел и подсчитать, сколько на этом «отрезке» содержится четных чисел ( $m^*$ ). Деление  $m^*$  на 100 и покажет нам  $P^*(A)$  — относительную частоту выпадения герба в некоторой серии подбрасываний монеты.

Специалисты, пользующиеся методами «вычислительной математики», нередко применяют таблицы случайных однозначных чисел к быстрому решению таких задач, которые оказываются трудными при ином подходе к ним. Этот способ решения задач («метод Монте-Карло»), конечно, более сложных, чем подсчет частоты события, является одним из практических применений теории вероятностей. Подробнее об этом рассказано, например, в брошюре И. М. Соболя «Метод Монте-Карло».

В своей домашней вычислительной лаборатории надо иметь «под руками» хотя бы 500—600 однозначных случайных чисел. Для этого к той таблице, которая приведена на странице 14, присоедините еще столько же случайных чисел, например цифр номеров билетов денежно-вещевой лотереи, на которые пали выигрыши в одном или нескольких тиражах.

В образовавшейся таблице выделите 5 последовательных серий по 100 цифр в каждой и подсчитайте пять значений  $P^*(A) = \frac{m^*}{100}$ , где  $m^*$  — количество четных чисел

отдельно в каждой серии.

К полученным пяти результатам присоедините еще шестое значение  $P^*(A)$ , вычисленное для всех вместе взятых пяти сотен однозначных случайных чисел.

Сравните эти 6 значений  $P^*(A)$  между собой, и вряд ли каждое из них будет намного отличаться от числа 0,5 — «априорного» значения вероятности события  $A$  — «появление герба в единичном подбрасывании монеты».

Такие эксперименты делались и непосредственно с монетами (Бюффон, Пуассон) и с заменяющими их однозначными случайными числами (наши современники) и, разумеется, нетрудно было бы рассказать здесь о достигнутых числовых результатах, но не хочется лишать вас удовольствия, получаемого от самостоятельных подсчетов, убеждающих в том, что своеобразие случая, проявляющееся в отдельном явлении, уступает место непреложности в массе однородных случайных явлений.

Да, действительно, при малом числе испытаний значение относительной частоты события может оказаться случайно и малым (близким к нулю), и большим (близким к единице). Но при увеличении числа испытаний относительная частота события теряет свой случайный характер и проявляет тенденцию стабилизироваться, группируясь около некоторого постоянного числа, которое полностью отвечает нашим представлениям об «априорном» существовании вероятности случайного события.

Такое свойство «выравниваемости» частот при увеличении числа опытов многократно проверено практикой.

Теория вероятностей и занимается только теми событиями, относительная частота которых устойчива. В частности, при соотношении элементарному событию некоторого числового значения вероятности, как этого требует постулат 2, часто исходят из предварительной оценки частоты этого события.

Если, например, многолетняя регистрация рождений отмечает, что в данном районе ежегодно мальчиков рождается на 2% больше, чем девочек (такова действительная статистика для многих государств), то в ожидании рожде-



ния одного ребенка элементарному событию — «рождение мальчика» — целесообразно соотнести вероятность 0,51, а второму элементарному событию — «рождение девочки» — вероятность 0,49.

Из 32 букв русского алфавита (полагая «е» и «ё» одной буквой) 10 гласных. Но осмысленный текст не является чисто случайной последовательностью букв. Поэтому, если бы вероятность встретить гласную букву в случайно выбранном месте литературного текста мы охарактеризовали числом  $\frac{10}{32} \approx 0,3$ , то вряд ли достигли бы объективного «отражения» действительности. Для создания «пространства вероятностей» появления букв алфавита в тексте естественно обратиться к предварительному подсчету относительной частоты появления каждой буквы в больших кусках литературного текста.

В обследованных «литературных селениях» оказалось, например, что букв «о» встречается в 55 раз больше, чем букв «ф». Вся таблица частот приведена ниже.

**Статистические значения относительных частот  
(вероятностей) букв русского языка**

|                |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Буква          | о     | е     | а     | и     | т     | н     | с     |       |
| Относ. частота | 0,110 | 0,087 | 0,075 | 0,075 | 0,065 | 0,065 | 0,055 |       |
| Буква          | р     | в     | л     | к     | м     | д     | п     | у     |
| Относ. частота | 0,048 | 0,046 | 0,042 | 0,034 | 0,031 | 0,030 | 0,028 | 0,025 |
| Буква          | я     | ы     | з     | ь     | б     | г     | ч     | й     |
| Относ. частота | 0,022 | 0,019 | 0,018 | 0,017 | 0,017 | 0,016 | 0,015 | 0,012 |
| Буква          | х     | ж     | ю     | ш     | ц     | щ     | э     | ф     |
| Относ. частота | 0,011 | 0,009 | 0,007 | 0,007 | 0,005 | 0,004 | 0,003 | 0,002 |

Приняв эти частоты за вероятности появления соответствующих букв, получим в качестве вероятности нашей встречи с гласной буквой на случайно выбранном месте литературного текста число

$$p = \frac{1}{100} \cdot (11,0 + 8,7 + 7,5 + 7,5 + 2,5 + 2,2 + 1,9 + 1,2 + 0,7 + 0,3) = 0,435$$

(при других способах вычислений это  $p$ , например, равно  $\approx 0,432$ ).

Всемирно известный ученый-математик, наш соотечественник, А. А. Марков (1856—1922) исследовал чередование гласных и согласных букв в последовательности, содержащей 20 000 букв из «Евгения Онегина». Оказалось, вероятность появления гласной буквы после гласной равна  $\alpha = 0,128$ , гласной буквы после согласной  $\beta = 0,663$ , т. е. гласная буква после согласной встречается «в среднем» в 5 раз чаще, чем гласная после гласной.

Субъективное, или, как говорят, «взятое с потолка», соотнесение событию вероятности его появления (в установленной системе событий) недопустимо в науке, просто бесполезно.

Это «табу», обязательное «для физиков», не распространяется «на лириков».

В «Чрезвычайном поручении» — втором фильме трилогии о Камо — в один из драматических моментов развития событий Савинков спрашивает у Камо:

— Вы умеете взвешивать шансы? (Если Камо дрогнет, Савинков выиграет психологическую схватку.) Камо отвечает:

— Да, их немного, десять на сто. Но мне случалось использовать и меньше. А вот у вас, Савинков, ни одного шанса.

— Значит, застрелите?

— Обязательно.

Произведенная оценка шансов непригодна для вычислений, но как мера эмоционального накала событий и готовности Камо к любому исходу поединка вполне оправдана.

Органическая, глубокая связь между относительной частотой события и его вероятностью является проявлением объективного закона *больших чисел* — универсальной закономерности, наблюдаемой в случайных явлениях.

Первой, простейшей формулировкой закона больших чисел является *теорема Бернулли*. Я. Бернулли доказал, что

при неограниченном увеличении числа однородных независимых опытов с практической достоверностью можно утверждать, что частота события будет сколь угодно мало отличаться от его вероятности в отдельном опыте.

Именно открытие закона больших чисел сделало возможным построение теории вероятностей и многостороннее применение методов статистического исследования разнообразнейших явлений жизни.

Следует заметить, что у многих, кто нечетко понял суть тенденции «выравнивания» частот, проявляются заблуждения при практической оценке шансов на появление ожидаемого события. Поэтому полезно прежде всего проверить себя.

**В о п р о с п е р в ы й.** При сохранении всех условий, обеспечивающих честную случайность, подряд 9 раз появлялся герб при подбрасывании одной монеты. Как вы оцениваете шансы на появление герба в 10-й раз подряд? Решитесь сделать «ставку» на герб или, как многие в подобной ситуации, сочтете, что теперь у цифры больше шансов на появление, чем у герба?

**О т в е т.** (Совпадает ли с вашим ответом?)

Конечно, шансы у герба и цифры на появление в десятом, как и в первом, подбрасывании остаются равными. Закон больших чисел не обещает немедленного избытка случаев появления цифры, чтобы «уравновесить» предшествующий избыток гербов, но относительные частоты появления герба и цифры неизбежно «выравниваются», когда будет сделано очень большое количество подбрасываний монеты. Образно можно сказать, что «в плане статистическом» теория и опыт соглашаются на временные разногласия. Это значит, что «предсказания», основанные на результатах фактически выполненных испытаний, следует воспринимать как приблизительные, а не как неизбежные. Недаром предсказания погоды обычно называют прогнозами.

**В о п р о с в т о р о й.** В спортлото для выигрыша надо угадать 3—6 чисел из 49. Намереваясь избрать предполагаемые 6 чисел перед предстоящим тиражом, надо ли учитывать, какие числа появлялись в серии предыдущих тиражей?

О т в е т. Нет. У любого числа вероятность появления в предстоящем тираже точно такая же, как и во всех предыдущих, так как перед каждым тиражом в барабан закладываются и тщательно перемешиваются все 49 шариков с написанными на их поверхности числами.

## МОНЕТА — ГЕНЕРАТОР СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

Условимся: если подброшенная монета упала вверх гербом, записываем цифру 1; если монета упала вверх цифрой, записываем 0.

Повторим подбрасывание монеты. Записывая подряд обусловленные цифры, получим либо 00, либо 01, либо 10, либо 11. Пусть это будут записи чисел в двоичной системе:

$(\overline{a_1 a_2})_2$ , где  $a_1, a_2$  — цифры: либо 0, либо 1.

При переходе к десятичной системе получаем:

$$(\overline{a_1 a_2})_2 = (a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^0).$$

Конкретно:  $(00)_2 = 0$ ;  $(01)_2 = 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1$ ;

$$(10)_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2; (11)_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3.$$

Так, всякое  $n$ -кратное подбрасывание монеты, сопровождающееся соответствующей записью цифр, образует какое-либо  $n$ -значное случайное число в двоичной системе.

Трудоемкий, но вполне законный способ составления таблицы случайных чисел.

В о п р о с. Монета «записала» в двоичной системе два случайных пятизначных числа: 11111 и 01010. Какие это числа в десятичной системе?

О т в е т.  $(11111)_2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31$ ;

$$(01010)_2 = 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 10.$$

Игральная кость более «быстродействующий генератор» случайных чисел, чем монета. Будем считать шестерку нулем, а последовательность цифр, возникающих при нескольких подбрасываниях кубика, — записью случайного числа в системе с основанием 6.

Так как в этой системе счисления самое большое трехзначное число  $(555)_6 = 5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 5 \cdot 6^0 = 215$ , то при трехкратном бросании игрального кубика или одновременном бросании трех кубиков можно получить любое целое случайное число (включая 0) на отрезке  $[0; 215]$ .

## ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

**З а д а ч а.** Пусть некая частица, первоначально размещившаяся в начале координат  $O(0; 0)$ , совершает случайный маршрут по следующему правилу: бросаем игральный кубик; если выпало четное число, частица делает шаг вправо, если нечетное, — шаг вверх. Размер шага — сторона клетки. Полагаем, что выпадения четного и нечетного чисел равновозможны (тех и других по 3 на кубике).

Какие точки плоскости являются концами всех возможных маршрутов частицы, выходящей из точки  $O(0, 0)$  и делающей  $n$  шагов по велению случая, воплотившегося в кубик?

Какова вероятность закончить маршрут в каждой из этих точек?

**Р е ш е н и е.** Если  $n$  состоит из  $x$  шагов по горизонтали и  $y$  шагов по вертикали, то  $x + y = n$ . Это уравнение говорит о том, что все точки с целыми положительными координатами  $x, y$ , удовлетворяющими ему, лежат на прямой, отсекающей отрезок  $n$  на оси  $Oy$  и отрезок  $n$  на оси  $Ox$ , и каждая из этих точек является концом некоторого количества возможных маршрутов частицы, делающей  $n$  шагов.

Пусть  $n = 1$ . На прямой  $x + y = 1$  есть две точки, каждая из которых — конец одного маршрута. Пусть  $n = 2$ . На прямой  $x + y = 2$  — три точки; к средней ведут два маршрута, к крайним — по одному. На рисунке 15 около каждой точки записано число ведущих к ней маршрутов.

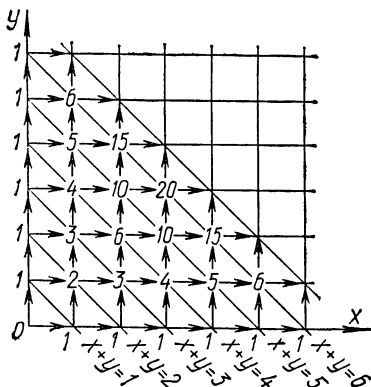


Рис. 15

Эти числа позволяют легко подсчитать число маршрутов, ведущих к точкам следующей, выше лежащей прямой. Как видно, для подсчета числа маршрутов, ведущих к точке прямой  $x + y = n$ , достаточно сложить числа, записанные у соседних точек слева и снизу, лежащих на прямой  $x + y = n - 1$ .

Например, для точек прямой  $x + y = 3$  получаются такие количества окончаний маршрутов:  $1 + 0 = 1$ ,  $1 + 2 = 3$ ,  $2 + 1 = 3$ ,  $0 + 1 = 1$ , а для точек прямой  $x + y = 4$  такие:  $1 + 0 = 1$ ,  $1 + 3 = 4$ ,  $3 + 3 = 6$ ,  $3 + 1 = 4$ ,  $0 + 1 = 1$  и т. д.

Числа, расположившиеся на рисунке вдоль диагональных прямых, выпишем рядами сверху вниз:

| $n$<br>↓ | $m \rightarrow$ | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5 | 6 | Сумма      |
|----------|-----------------|---|---|----|----|----|---|---|------------|
| 0        |                 | 1 |   |    |    |    |   |   | $1 = 2^0$  |
| 1        |                 | 1 | 1 |    |    |    |   |   | $2 = 2$    |
| 2        |                 | 1 | 2 | 1  |    |    |   |   | $4 = 2^2$  |
| 3        |                 | 1 | 3 | 3  | 1  |    |   |   | $8 = 2^3$  |
| 4        |                 | 1 | 4 | 6  | 4  | 1  |   |   | $16 = 2^4$ |
| 5        |                 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5  | 1 |   | $32 = 2^5$ |
| 6        |                 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | $64 = 2^6$ |
| ...      |                 | . | . | .  | .  | .  | . | . | ...        |

Треугольник Паскаля.

По смыслу чисел, заполняющих эту таблицу, ясно, что она является своего рода «механизмом», вычисляющим частоту появления некоторого вида событий, например число маршрутов, оканчивающихся в заданной точке. В честь Паскаля эту таблицу стали называть *треугольником Паскаля*. Закон заполнения таблицы числами прост: в нулевом столбце и по диагонали поставить единицы и под вторым из двух рядом стоящих чисел записать их сумму. Например, сумма чисел 5 и 10 дает число 15 в следующей строке под вторым слагаемым.

Заметим, что для любого числа в треугольнике номер столбца не больше номера строки, на пересечении которых находится рассматриваемое число, т. е.  $m \leq n$ , причем счет столбцов и строк идет не с 1, а с 0.

Обозначим символом  $\binom{n}{m}$  число, стоящее в таблице на пересечении  $n$ -й строки и  $m$ -го столбца ( $m \leq n$ ). Так как нулевой столбец и диагональ заполнены единицами, то будем считать, что

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ и } \binom{n}{n} = 1 \text{ при } n = 0, 1, 2, \dots$$

Правило заполнения числами остальных мест в треугольнике Паскаля для  $n = 2, 3, \dots$  и  $m < n$  можно выразить формулой

$$\| \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}.$$

Правая часть этой формулы как бы возвращает нас к  $(n-1)$ -й строке, чтобы получить число  $n$ -й строки (осуществляет «рекурсию»).

Такого рода формулы принято называть *рекуррентными*.

Теперь нетрудно вычислить и вероятность возможности окончить маршрут в фиксированной точке прямой  $x + y = n$  при заданном значении  $n$ .

Число всех возможных способов перемещения частицы за  $n$  шагов равно  $2^n$ . Естественно, что такова же сумма всех чисел  $n$ -й строки треугольника Паскаля. Перенумеруем точки на прямой  $x + y = n$ , отмеченные числами, обозначая точку пересечения с осью  $Oy$  номером 0, следующую точку — номером 1 и т. д. Точка пересечения с осью  $Ox$  будет иметь номер  $n$ . При этом число, соответствующее точке, взятой на прямой, окажется в столбце (треугольника Паскаля), номер которого ( $m$ ) совпадает с номером точки ( $m$ ).

Вычислим, например, вероятность  $P_6$  (№ 3) попадания частицы в точку № 3, если частица делает 6 шагов. Полагая все ее маршруты равновероятными, получаем  $P_6$  (№ 3) =  $\frac{\binom{6}{3}}{2^6}$ . В 6-й строке на пересечении с третьим столбцом треугольника Паскаля записано число 20, следовательно,

$$P_6(\text{№}3) = \frac{\binom{6}{3}}{2^6} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}.$$

Точка № 3 — средняя точка диагонального отрезка, соответствующего шести шагам частицы. Вероятность со-

бытия — попасть частице в любую другую точку того же отрезка — меньше. Она уменьшается по мере удаления в обе стороны от средней точки отрезка. Эта закономерность следует из свойства чисел любой строки треугольника Паскаля — до середины они возрастают, а затем убывают в обратном порядке.

В общем случае вероятность события — попасть точке, делающей  $n$  шагов, в соответствующую точку, имеющую номер  $m$ , равна

$$P_n(m) = \frac{\binom{n}{m}}{2^n}.$$

К той же формуле вероятности приводит задача о необыкновенном термите, который прогрызает прямолинейный туннель в бревне и каждую секунду либо делает рывок вперед точно на  $h$  мм, либо остается на месте. За  $n$  секунд он продвинется не более чем на  $n$  рывков. Если считать все возможные варианты продвижения вперед равновероятными, то вероятность сделать  $m$  рывков за первые  $n$  секунд равна:

$$P_n(m) = \frac{\binom{n}{m}}{2^n}$$

(убедитесь в этом самостоятельно).

Для наглядного восприятия соответствия между событиями (число возможных рывков) и их вероятностями постройте несколько графиков функции  $m \rightarrow P_n(m)$  при различных значениях  $n$ . В качестве примера на рисунке 16 представлены два графика: при  $n = 4$  и  $n = 16$ . Масштаб по горизонтальной оси выбран так, что наибольший возможный пробег термита изображается на каждом чертеже отрезком

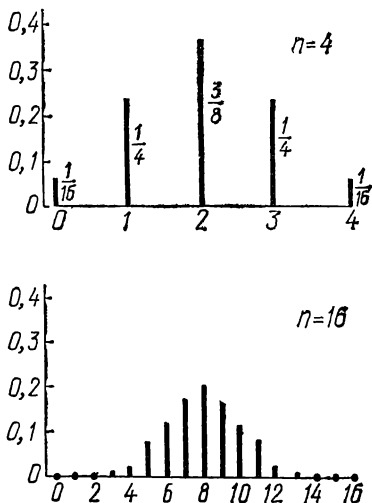


Рис. 16



одинаковой длины. Масштаб по оси, на которой откладываются вероятности, один и тот же.

Заметно, что вероятности больших отклонений от среднего значения пробега (от  $\frac{1}{2}n$ ) с возрастанием  $n$  становятся все более малыми. Не пожелает ли кто-нибудь проверить вычислениями, что и здесь среднее квадратическое отклонение от среднего пробега равно  $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ ?

Еще одно наблюдение. В случае четного  $n$  среднее значение пробега  $\bar{m} = \frac{1}{2}n$  совпадает с наиболее вероятным числом рывков. Но в случае нечетного  $n$  среднее значение пробега  $\bar{m} = \frac{1}{2}n$  — число дробное и совпадать с наиболее вероятным числом рывков не может.

Выясните на каком-нибудь примере нечетного  $n$ , скажем  $n = 7$ , какое число рывков (и единственное ли?) термита является наиболее вероятным, и постройте для этого случая график функции  $m \rightarrow P_n(m)$ .

Исходя из формулы для  $P_n(m)$ , попутно рассмотрим любопытную геометрическую интерпретацию любой строки треугольника Паскаля. Каждое число  $n$ -й строки вида  $\binom{n}{m}$  можно принять в качестве меры площади прямоугольника, высота которого равна соответствующему значению  $P_n(m)$ , а основание  $2^n$  — одно и то же для всех  $m$ :

$$\binom{n}{m} = P_n(m) \cdot 2^n.$$

Построенные рядом, они образуют ломаный контур «палаточной» формы — геометрическую интерпретацию  $n$ -й строки треугольника Паскаля. На рисунке 17 показан пример, возникший из графика для  $n = 4$ , представленного на предыдущем рисунке.

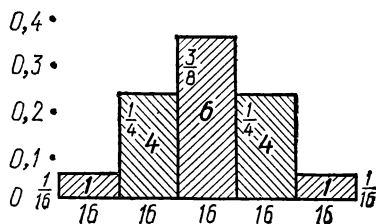


Рис. 17

Для развлечения после интенсивных умственных усилий предлагается задача шутивого содержания (не имеющая отношения к треугольнику Паскаля).

Деревянный куб склеен из 27 одинаковых кубиков. Термит в этот раз расположился в центре одного из кубиков, не прилежащего к ребру куба и не центрального. Он прогрызает туннель от центра кубика к центру соседнего кубика. Его траектория состоит из отрезков, параллельных ребрам куба и оканчивается в центральном кубике. Дважды в один кубик он не заходит. Все возможные траектории равновероятны. Какова вероятность траектории, соединяющей центры всех кубиков? (Ответ на с. 79.)

### ДЕРЕВО С ЧИСЛАМИ НА ВЕТВЯХ

Известные хвастуны — капитан Врунгель (В), барон Мюнхгаузен (М), Тартарен из Тараскона (Т) и Хлестаков (Х) — все же говорят правду в одном случае из трех, независимо один от другого.

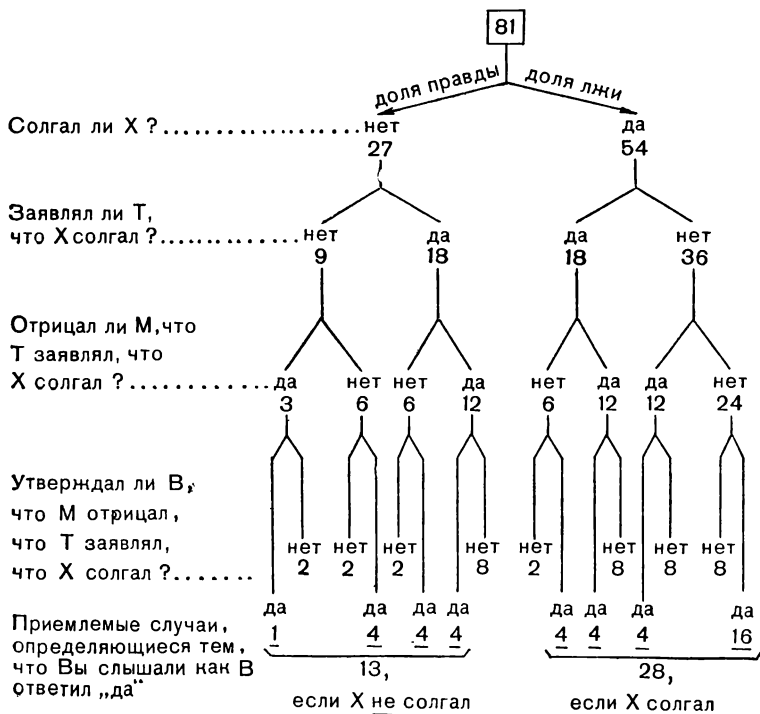


Рис. 18

Так вот, если В утверждает, что М отрицает, что Т заявляет, что Х сейчас солгал, то какова вероятность того, что Х сказал правду?

Стилистическое своеобразие усиливает эмоциональность восприятия задачи, но для ее решения сообщенных сведений явно недостаточно.

Чтобы решить задачу, считайте себя лицом, присутствующим в этой компании и участвующим в уточнении условия.

Предположим, что Т слышал (а вы нет) утверждение, которое сказал Х. Вы спрашиваете Т: «Солгал ли Х?», и М (но не вы) слышал ответ Т (ответом было либо «да», либо «нет»). Теперь вы спрашиваете М: «Заявлял ли Т, что Х солгал?», и В (но не вы) слышал ответ М (ответом было либо «да», либо «нет»). Наконец вы спрашиваете В: «Отрицал ли М, что Т заявлял, что Х солгал?», и на этот раз вы слышали ответ В, который сказал «да».

Дальнейшие рассуждения удобно сопровождать построением диаграммы («дерева»), разветвляющейся в соответствии с относительными частотами (вероятностями) правды ( $\frac{1}{3}$ ) и лжи ( $\frac{2}{3}$ ) в ответах каждого из героев задачи (рис. 18).

Чтобы не иметь дела с дробями, будем решать задачу в долях какого-нибудь условно взятого числа равновозможных исходов. Как будет видно, в качестве исходного числа, кратного трем, пригодно 81.

На каждом этапе построения «дерева» доли правдивых ответов ( $\frac{1}{3}$  случаев) будем ответвлять влево, а лживых ( $\frac{2}{3}$  случаев) — вправо.

Ответ «нет» на ваш вопрос «солгал ли Х?» надо считать правдой и записать слева.

Замечаем также, что 40 случаев из 81 не ведут к окончательному ответу «да», услышанному вами; они, как катализатор в химической реакции, помогли процессу решения, но далее их можно не принимать во внимание.

13 случаев из 81 ответом «да» подтверждают предположение о том, что Х в этот раз сказал правду, но в 28 случаях из 81 окончательный ответ «да», наоборот, подтверждает предположение о том, что Х солгал.

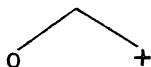
В действительности вы з н а е т е, что В ответил «да», следовательно, вероятность того, что в этот раз Х сказал правду, равна

$$\frac{13}{13 + 28} = \frac{13}{41}.$$

Систему решения задач с «выращиванием дерева» в процессе рассуждений и использования данных разрабатывает так называемая *теория графов*. «Граф» — это краткое название всякой совокупности точек и соединяющих их линий; при некоторых дополнительных условиях граф называется «деревом».

Вернемся к ситуациям более четким, но создающим усложненные комбинации случаев.

В игре волейбол ничьих не бывает. После одной игры у команды А или одна победа (+), или ни одной победы (0).



Из двух игр (№ 1 и № 2), проведенных командой А, могут образоваться относительно ее побед следующие сочетания игр:

а) «из двух по нулю» — нет побед (0 0) — одна комбинация;

б) «из двух по одной» — одна победа в игре № 1 (+0), или в игре № 2 (0+) — две комбинации;

в) «из двух по две» — две победы (++) — одна комбинация.

Продолжая «разветвлять дерево», получим картину возможных сочетаний из трех игр, содержащих «нуль побед», «одну победу», «две победы» и «три победы», далее сочетания из четырех игр и т. д. (рис. 19).

От каждой ветви «отпочковываются» две при помощи простого присоединения по одному разу каждого из двух возможных исходов следующей игры (или +, или 0).

Число возможных сочетаний из  $n$  игр, принесших команде  $m$  побед, в более общем толковании есть число способов выделения из множества, содержащего  $n$  элементов, подмножества, состоящего из  $m$  элементов. Оно называется числом сочетаний из  $n$  по  $m$  и обозначается символом  $C_n^m$  (читаем: «цэ из эн по эм»).

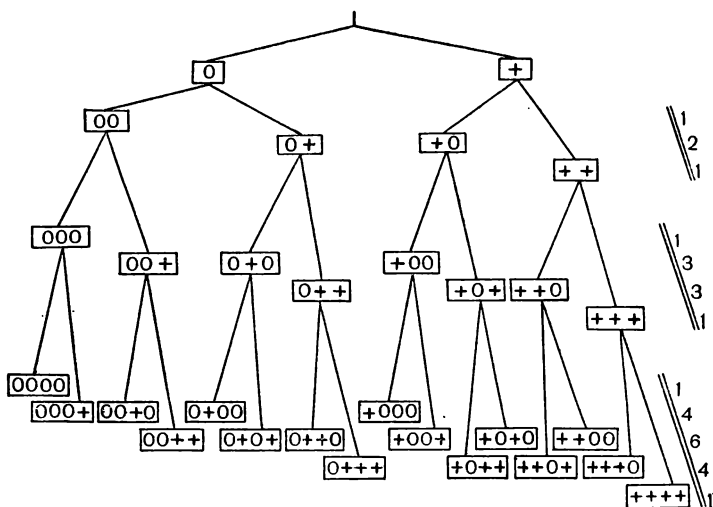


Рис. 19

Снимая «плоды» с дерева и подсчитывая  $C_n^m$  ( $m$  — число побед) для каждой линии ветвей, получаем любопытную таблицу результатов:

$$\begin{array}{lll} C_1^0 = 1 & C_1^1 = 1 & \\ C_2^0 = 1 & C_2^1 = 2 & C_2^2 = 1 \\ C_3^0 = 1 & C_3^1 = 3 & C_3^2 = 3 & C_3^3 = 1. \end{array}$$

Последовательность строк ясна — опять треугольник Паскаля!

Значит, число сочетаний из  $n$  по  $m$  равно соответствующему числу  $\binom{n}{m}$  треугольника Паскаля,  $C_n^m = \binom{n}{m}$ .

Например,  $C_4^2 = \binom{4}{2} = 6$  — найдите эти 6 комбинаций на нашем «дереве».

Оказалось, что символы  $\binom{n}{m}$  и  $C_n^m$  равнозначны, поэтому в дальнейшем оставим только второй из них — он принят в нашей математической литературе.

Факт равенства соответствующих чисел  $\binom{n}{m}$  и  $C_n^m$  не трудно осознать. Комбинация побед и поражений у команды

после  $n$  игр эквивалентна продвижению термита (в задаче на странице 63) в результате такой же комбинации его рывков и пауз.

Задачи разные, а математическая модель решения у них одна.

### ТРИ ЛИЦА У ОДНОЙ ФОРМУЛЫ

Из определения числа сочетаний из  $n$  по  $m$  следует, что при помощи сочетаний создаются неупорядоченные подмножества, объединяющие  $m$  элементов, выбранных из данных  $n$  элементов. Иногда сочетания так и называют выборками.

Для выяснения числа способов выборки мы располагаем пока только одним «механизмом» — треугольником Паскаля. Ясно, что он малоудобен в случае больших значений  $n$ . Конечно, формула для вычисления  $C_n^m$  была бы предпочтительнее.

Для лучшего понимания вывода общей формулы построим сначала ее макет на частном случае.

1) Отберем из данных пяти элементов  $A, B, C, D, E$  какие-нибудь три, например  $ABC$ . Это одна выборка из возможных десяти. (На остальные девять только взглянем мельком:  $ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$ .)

2) Сделаем все перестановки из отобранных элементов  $A, B, C$  и из оставшихся двух  $D, E$ .

|   |   |   |
|---|---|---|
| <div style="display: inline-block; vertical-align: middle; text-align: center;"> <div style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">перестановки из отобранных</div> <div style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">трех элементов</div> </div> | $ABC \begin{smallmatrix} \leftarrow DE \\ \rightarrow ED \end{smallmatrix}$ | ← перестановки из оставшихся двух элементов |
|   | $ACB \begin{smallmatrix} \leftarrow DE \\ \rightarrow ED \end{smallmatrix}$ | »   |
|   | $BCA \begin{smallmatrix} \leftarrow DE \\ \rightarrow ED \end{smallmatrix}$ | »   |
|   | $BAC \begin{smallmatrix} \leftarrow DE \\ \rightarrow ED \end{smallmatrix}$ | »   |
|   | $CAB \begin{smallmatrix} \leftarrow DE \\ \rightarrow ED \end{smallmatrix}$ | »   |
|   | $CBA \begin{smallmatrix} \leftarrow DE \\ \rightarrow ED \end{smallmatrix}$ | »   |

3) Комбинируя каждую перестановку из отобранных трех элементов (всего их  $3!$ ) с каждой перестановкой из оставшихся двух элементов (этих перестановок  $2!$ ), получим  $3! \cdot 2!$  перестановок из пяти элементов. Но это еще не все перестановки из данных пяти элементов, а только те, в которых первые три места занимают элементы только одной выборки.

4) Все возможные перестановки из пяти элементов (а всего их должно быть  $5!$ ) получатся при применении указанной системы подсчета ко всем выборкам, число которых  $C_5^3$ .

Получаем:  $5! = C_5^3 \cdot 3! \cdot 2!$ , откуда  $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ ,

как и должно быть, если считать известным  $C_5^3$  из треугольника Паскаля. Повторим эти рассуждения для вывода формулы общего вида.

1) Из  $n$  элементов возьмем одну выборку, содержащую  $m$  элементов.

2) Сделаем (мысленно) все перестановки из  $m$  отобранных элементов (число способов равно  $m!$ ), а также и все перестановки из оставшихся  $n - m$  элементов (число способов равно  $(n - m)!$ ).

3) Комбинируя каждую перестановку из отобранных элементов с каждой перестановкой из оставшихся элементов, получим  $m! (n - m)!$  способов упорядочить данное множество  $n$  элементов (сделать перестановки из  $n$  элементов). Но это еще не все  $n!$  способов (перестановок), которыми можно упорядочить данное множество.

Чтобы получить полное число перестановок из  $n$  элементов, надо указанную систему подсчета применить ко всем выборкам  $m$  элементов из  $n$ , число которых  $C_n^m$ .

Этот подсчет дает число  $C_n^m \cdot m! (n - m)!$  перестановок, каждая из которых получается ровно один раз. Поэтому  $C_n^m \cdot m! (n - m)! = n!$ , откуда

$$\parallel C_n^m = \frac{n!}{m! (n - m)!}.$$

Чтобы формула была верна и при  $n = 0$ , и при  $m = 0$ , условливаются считать, что  $0! = 1$ .

Целочисленная функция  $n!$  растет быстро:  $5! = 120$ , — чуть больше сотни, но уже  $6! = 720$ ,  $7! = 5040$ ,  $8! = 40320$ ,  $9! = 362880$ , а  $10!$  превышает три миллиона,  $10! = 3\,628\,800$ .

При больших значениях  $n$  и  $m$ , разумеется, надо прибегать к приближенным вычислениям. Наиболее целесообразный прием в этом случае — обратиться к таблице логарифмов факториалов (есть в справочниках). Вот небольшая выдержка из такой таблицы:

| $x$ | $\lg x!$ |
|-----|----------|
| 10  | 6,5598   |
| 25  | 25,1906  |
| 50  | 64,4831  |
| 70  | 100,0784 |
| 100 | 157,9700 |

Логарифмы факториалов, включенные в таблицу, имеют одинаковую точность, и это важно для самостоятельных вычислений.

**З а д а ч а.** Нереально полагать, что у волейбольной команды  $A$  в каждой игре одинаковые шансы победить и проиграть, но если все-таки принять эту гипотезу, то с какой вероятностью в 100 встречах она может выиграть 50 раз?

Иногда отвечают, что  $P_{100}(50) = \frac{50}{100} = 0,5$ , как и в одной игре. Но из предыдущего рассмотрения следует, что

$$P_{100}(50) = \frac{C_{100}^{50}}{2^{100}} = \frac{100!}{(50!)^2 2^{100}};$$

$\lg 100!$  и  $\lg 50!$  есть в нашей маленькой справочной таблице,  $\lg 2$  сообщаем с семью десятичными знаками после запятой,  $\lg 2 \approx 0,3010300$ . Дело в том, что  $\lg 2$  придется умножать на 100, у произведения окажутся сомнительными последние три знака. Отбросив их, оставим четыре верные цифры после запятой, как и в записи остальных логарифмов. Выполните дальнейшие вычисления и вы получите  $\lg P_{100}(50) \approx \bar{2},9008$ . По таблице антилогарифмов:  $P_{100}(50) \approx 0,08 \rightarrow$  только восемь сотых!

Утешение для болельщиков в том, что точно такая же вероятность и проиграть 50 раз в 100 играх.

Вероятность какого числа побед в 100 играх наибольшая при тех же условиях? (Сообразите!)



Вернемся к числу  $C_n^m$ . В двух лицах оно нам себя показало — элемент треугольника Паскаля и число сочетаний из  $n$  по  $m$ .

Пусть откроет и свое третье лицо, обращенное по преимуществу к операциям алгебры.

Оказывается, что числа  $C_n^m$  при  $m = 0, 1, \dots, n$  являются коэффициентами разложения  $n$ -й степени бинома  $a + b$ , а потому и называются еще *биномиальными коэффициентами*.

Вспомните, например, формулу возведения бинома  $a + b$  в куб:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Выпишем коэффициенты разложения: 1, 3, 3, 1. Сразу замечаем, что они — обитатели 3-й строки треугольника Паскаля и, следовательно, могут быть представлены как  $C_3^0, C_3^1, C_3^2$  и  $C_3^3$ .

Эта особенность биномиальных коэффициентов подтверждается и знакомой формулой квадрата суммы, и первой степени суммы, и даже нулевой:  $(a + b)^0 = 1$ , если условиться считать, что  $C_0^0 = 1$  (обитатель перекрестка нулевой строки и нулевого столбца треугольника Паскаля).

Напрашивается гипотеза о том, что и для всякого натурального  $n$  справедлива формула, называемая *биномом Ньютона*:

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^m a^{n-m}b^m + \dots + C_n^n b^n,$$

$$\text{или короче } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (\text{предыдущая строка}$$

раскрывает смысл специального символа суммы  $\sum_{k=0}^n$ ).

Чаше в записи бинома Ньютона опускают коэффициенты  $C_n^0$  и  $C_n^n$  (они — единицы). Тогда формула принимает следующий вид:

$$[(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^m a^{n-m}b^m + \dots + b^n.$$

Применяя принцип математической индукции, следует самостоятельно подтвердить справедливость высказанной гипотезы о биноме Ньютона.

При доказательстве опирайтесь на рекуррентную формулу для чисел треугольника Паскаля, которая в привычных теперь обозначениях примет следующий вид:

$$\| C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m. \quad (\text{Тождество 1.})$$

В случае затруднений или при желании проверить себя загляните в главу «Дополнения», содержащую подборку некоторых выводов, опущенных в основном тексте книги.

Известны разнообразные тождества, связывающие биномиальные коэффициенты.

Полезно такое тождество

$$\| C_n^m = C_n^{n-m}. \quad (\text{Тождество 2.})$$

Оно сразу следует из формулы, приведенной на странице 70, а рассказывает оно о равенстве чисел в любой строке треугольника Паскаля, симметрично расположенных относительно «центра» строки. Приведем еще тождество

$$\| C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \quad (\text{Тождество 3.})$$

Оно следует из формулы бинома, если положить  $a = b = 1$ , и рассказывает о том, что для всякого данного  $n$  сумма биномиальных коэффициентов равна  $n$ -й степени числа 2.

Самостоятельно докажите еще одно свойство:

в разложении бинома  $(a + b)^n$  суммы всех биномиальных коэффициентов с четными верхними индексами (включая нуль) и с нечетными верхними индексами равны между собой и каждая из них выражается числом  $2^{n-1}$ .

**У к а з а н и е.** В разложении бинома надо положить  $a = 1$ , а  $b = -1$ .

## ПО РАЗРАБОТАННОЙ ТЕХНОЛОГИИ

«Истинная логика нашего мира — правильный подсчет вероятностей» — отмечает знаменитый физик Джеймс Максвелл. Вот и нам пришла пора проверить, насколько успешным был наш первый виток «по спирали познания» вероятности. Насколько освоена технология непосредственного — основанного на прямом применении основных постулатов — вычисления вероятностей событий.

По предложенным далее вопросам необходимо сначала высказать свое суждение, а потом сверить его с последующим объяснением.

**Первый вопрос.** Какое теперь мы можем предложить решение задачи о вероятности наугад снять с полки 3 банки с краской одного цвета, если из 6 банок 3 содержат зеленую краску и 3 — красную (с. 33).

**Ответ.** Наиболее естественный ход мысли — считать точками пространства элементарных событий (ПЭС) все возможные выборки (сочетания) из 6 предметов по 3:

$$n = C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20.$$

Два элементарных события — 3 банки с зеленой краской и 3 банки с красной — благоприятствуют появлению задуманного события (А).

Принимая гипотезу равновероятности элементарных событий, получаем:  $P(A) = \frac{1}{20} \cdot 2 = 0,1$ .

**Второй вопрос.** При первом обсуждении этой задачи (см. с. 33—35) были предложены варианты решения, дающие для того же события (А) иные вероятности:

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(A) = \frac{1}{4}.$$

Нам надо определить свое отношение к такому разногласию. Какое объяснение из следующих четырех является правильным?

1. Неверно сформировано ПЭС — не все возможные случаи включены.

2. В предложенных трех вариантах решения ПЭС сформировано правильно, но незаконно все элементарные события считать равновероятными.

3. Одно и то же событие в условиях одной задачи не может иметь разные значения вероятности.

4. Все четыре вероятностные характеристики события А  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{ и } \frac{1}{10}\right)$  имеют право на признание.

**Ответ.** Объяснение № 2. Растолкуем его подробнее.

В нашей первой попытке решения (см. с. 33) предлагается ПЭС не из 20 элементарных событий, к которым привел подсчет числа возможных сочетаний из 6 по 3, а только из четырех:

а)  $\boxed{З} \boxed{З} \boxed{З}$   
ЗЗ

б)  $\boxed{К} \boxed{К} \boxed{К}$   
ЗК

в)  $\boxed{З} \boxed{З} \boxed{К}$   
2З+1К

г)  $\boxed{К} \boxed{К} \boxed{З}$   
2К+1З

Законно это? Вполне. Теория допускает возможность различных ПЭС для вычисления вероятности события, связанного с выделенными элементарными событиями. Допустимо ли считать эти 4 элементарных события равновероятными?

Здесь стоп! Вспомним о «табу», запрещающем выносить суждение о равновозможности событий без предварительного применения правдоподобных рассуждений, учитывающих, так сказать, «физику» событий.

Изображение банок на рисунке и описание элементарных событий (а), (б), (в) и (г) действительно показывают некоторую симметрию: если красные банки «позеленеют», а зеленые «покраснеют», то ПЭС не изменится. Но в данном случае это побочная симметрия, «лежащая на поверхности событий», не создающая для этих элементарных событий одинаковых физически существенных условий к их «равноправию».

Событию (в), а также и (г) свойственно девять ( $C_3^2 \times C_3^1 = 9$ ) различных «состояний» для появления в одном испытании, а каждому из событий (а) и (б) — по одному. Следовательно, гипотеза равновероятности в применении к элементарным событиям (а), (б), (в) и (г) была бы надуманной, неправдоподобной.

Учитывая равновозможную многоликость появления этих событий, правдоподобно соотнести им вероятности  $P(a) = P(b) = \frac{1}{20}$ ,  $P(v) = P(g) = \frac{9}{20}$ . На реконструированной модели, в соответствии с постулатом 3, получаем:

$$P(A) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = 0,1.$$

Руководствуясь аналогичными комбинаторными соображениями, установите, какие вероятности элементарных событий следовало бы признать правдоподобными во второй и третьей попытках решения этой задачи (с. 34). Для  $P(A)$  оба раза должно получиться 0,1.

**Т р е т ь и й в о п р о с.** На библиотечной полке расставлены «как попало» 10 книг, в числе которых есть нужные вам 3 книги. Какова вероятность того, что эти 3 книги оказались поставленными рядом?

**О т в е т.** Существует  $10!$  способов упорядочить расположение 10 книг на полке. Все  $10!$  способов возможно считать равновероятными элементарными событиями. Есть  $3!$

способов расставить рядом 3 избранные книги. Для размещения каждой из этих упорядоченных троек книг есть 8 мест: по одному слева и справа от комплекта оставшихся 7 книг и 6 мест в промежутках между этими 7 книгами. Но и 7 книг можно расставить на полке 7! способами.

Таким образом, число элементарных событий, благоприятствующих задуманному событию, равно  $8 \cdot 3! \cdot 7!$ . Искомая вероятность

$$p = \frac{8 \cdot 3! \cdot 7!}{10!} = \frac{1}{15}.$$

**Четвертый вопрос.** Из урны, содержащей  $a$  белых и  $b$  черных шаров, вынимаем наудачу сразу два шара. Сколько возможных исходов опыта ( $n$ ) могут составить ПЭС при условии различимости шаров? Сколько из них ( $m$ ) благоприятствуют событию «оба вынутых шара белые»?

**Ответ.** Число всех возможных различных исходов  $n = C_{a+b}^2$ . Они, например, и могут составить ПЭС; тогда  $m = C_a^2$ .

Дайте пример ответа на такой же вопрос при условии неразличимости белых и неразличимости черных шаров.

**Пятый вопрос.** В играх на первенство страны участвуют 16 команд, которые будут распределены по жребью на две группы по 8 команд.

Какова вероятность того, что две команды — победительницы в прошлогодних состязаниях:

- войдут в одну группу;
- войдут в разные группы?

**Ответ.** а) Число «точек» в принимаемом ПЭС равно  $C_{16}^8$ . Пусть обе команды-победительницы вошли в одну группу. К ним следует присоединить еще 6 любых команд из оставшихся 14. Это можно сделать  $C_{14}^6$  способами. Отобранные 8 команд можно объявить группой № 1, оставшиеся — группой № 2, и наоборот. Следовательно, требованию (а) удовлетворяют  $2 \cdot C_{14}^6$  комбинаций и вероятность этого события равна:  $p = \frac{2 \cdot C_{14}^6}{C_{16}^8} = \frac{7}{15}$ .

б) Принимаемое ПЭС содержит  $C_{16}^8$  «точек». Пусть обе команды-победительницы вошли в разные группы. Из оставшихся 14 команд выбираем какие-либо 7; число способов выбора:  $C_{14}^7$ . Отобранные 7 команд включаем в группу

№ 1, остальные 7 — в группу № 2, и наоборот. Следовательно, требованию б) удовлетворяют  $2 \cdot C_{14}^7$  комбинаций и вероятность этого события равна:

$$p = \frac{2 \cdot C_{14}^7}{C_{16}^8} = \frac{8}{15}.$$

**Шестой вопрос.** Контролеру принесли  $s$  одинаковых деталей, среди которых  $k$  деталей бракованных. Но контролер этого не знает и наугад берет для проверки  $k$  деталей. Если все проверенные детали окажутся доброкачественными, то контролируемая партия деталей принимается, в противном случае — подвергается дополнительной проверке.

а) Какова вероятность того, что эта партия деталей будет принята контролером?

б) Если оказалось, что все  $k$  деталей доброкачественные, то какова вероятность того, что следующая деталь, взятая из принесенной партии, также будет доброкачественной?

**О т в е т.** а) Число всех способов выбрать  $k$  деталей из  $s$  составляет

$$C_s^k = \frac{s!}{k!(s-k)!}.$$

Полагаем такие выборки равновероятными элементарными событиями. Событие  $A$  — «партия деталей принята» — наступает тогда, когда все  $k$  наугад выбранных деталей образуют комбинацию из  $s-k$  доброкачественных изделий. Следовательно, событию  $A$  благоприятствуют

$$C_{s-k}^k = \frac{(s-k)!}{k!(s-2k)!}$$

элементарных событий и

$$P(A) = \frac{C_{s-k}^k}{C_s^k} = \frac{(s-k)!(s-k)!}{s!(s-2k)!}$$

б) После исключения  $k$  деталей, оказавшихся доброкачественными, в принесенной партии осталось  $s-k$  деталей. (Они образуют ПЭС.) В их числе  $s-2k$  доброкачественных деталей. Появление любой из них благоприятствует событию  $B$  — «следующая деталь, взятая сверх  $k$ , также доброкачественная». Следовательно,

$$P(B) = \frac{s-k}{s-k}.$$

Найдите числовые значения  $P(A)$  и  $P(B)$  при  $s = 100$  и  $k = 10$ .

**Седьмой вопрос.** В последний день продажи лотерейных билетов из оставшихся  $k$  билетов обязательно будет продан, по крайней мере, один билет, а может быть будут проданы 2, 3, ..., и даже все  $k$  билетов. С какой вероятностью можно ожидать, что будет продано четное число билетов в этот день?

**Ответ.** Все возможные исходы можно считать равновероятными элементарными событиями. Их число  $n = C_k^1 + C_k^2 + \dots + C_k^k$ . Сумма всех биномиальных коэффициентов равна  $2^k$  (тождество 3 на странице 73). Поэтому  $n = 2^k - C_k^0 = 2^k - 1$ . Число случаев, благоприятствующих задуманному событию, составляет сумма биномиальных коэффициентов с четными верхними индексами  $m = C_k^2 + C_k^4 + \dots$

Вспоминая соответствующее свойство биномиальных коэффициентов (с. 73), заключаем, что  $m = 2^{k-1} - C_k^0 = 2^{k-1} - 1$  и искомая вероятность равна

$$p = \frac{2^{k-1} - 1}{2^k - 1}.$$

**Восьмой вопрос.** В семье капитана дальнего плавания есть дети голубоглазые и кареглазые. Всякий раз, когда он после очередного рейса возвращается домой, первыми его встречают какие-либо двое из детей. Кто именно — чистая случайность. Но в силу той же случайности в 50% всех случаев это оказываются голубоглазые дети. Сколько же всего голубоглазых детей в семье капитана?

**Ответ.** Пусть в семье капитана  $n$  детей, из них  $m$  голубоглазых. Вероятность того, что два случайно выбранных ребенка голубоглазые, равна:

$$\frac{C_m^2}{C_n^2} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}.$$

По условию эта вероятность равна  $\frac{1}{2}$ , поэтому задача сводится к подбору таких натуральных значений  $m$  и  $n$ , при которых  $\frac{m(m-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$ .

Наименьшими из таких значений являются  $n = 4$  и  $m = 3$ . Ближайшие последующие значения  $n = 21$  и  $m =$

= 15. Число 21, пожалуй, великовато для возможного состава семьи капитана, так что, по-видимому, у капитана четверо детей и трое из них—голубоглазые.

Девятый вопрос. Какова же вероятность для термита из задачи-шутки (с. 65) осуществить заданный ему маршрут?

Ответ. Требуемый условием задачи маршрут (событие  $A$ ) невозможен, поэтому  $P(A) = 0$ .

Остроумно следующее краткое обоснование приведенного ответа. Раскрасим кубики, как показано на рисунке 20. Получается 14 черных и 13 белых кубиков, причем центральный кубик белый. Окраски кубиков, прогрызаемых термитом, чередуются. Начинается маршрут от черного кубика, а окончиться должен в белом (центральном), что невозможно при нечетном числе прогрызаемых кубиков (чбчб...бч—27 чередований букв ч и б неизбежно заканчивается буквой ч, а не буквой б).

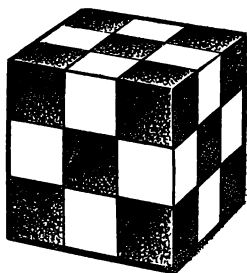


Рис. 20



# 2

## ПРИВЛЕКАЯ АЛГЕБРУ СОБЫТИЙ

Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира.

*Н. И. Лобачевский*

### СЛУГА ДВУХ ГОСПОД

Элементарные события  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , какими бы они ни были по физической природе, удобно называть точками пространства элементарных событий и изображать пятнышками, если захочется придать наглядность рассуждениям. Каждое пятнышко — одно элементарное событие.

Эти пятнышки тоже будем называть точками. Наглядное представление неэлементарного события — набор точек. На рисунке 21, а обведены рамкой

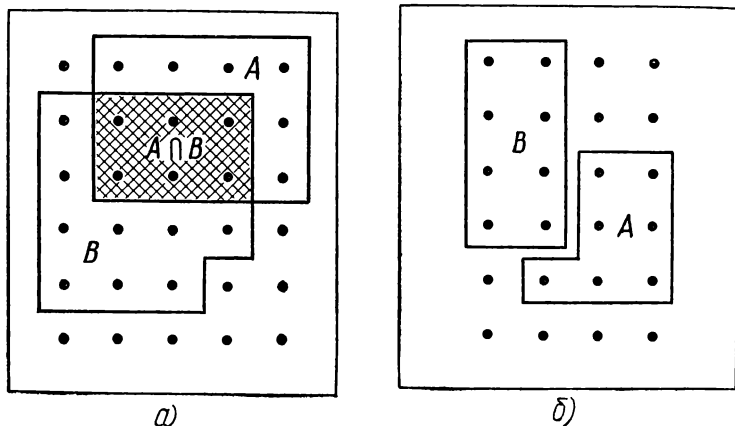


Рис. 21

событие  $A$  (12 точек) и событие  $B$  (15 точек), из них 6 являются общими для событий  $A$  и  $B$ .

Интересующие нас события (как и всякие множества) могут находиться в определенных «взаимоотношениях» друг с другом. Одно уже упоминалось: *несовместность* — наступление одного события исключает возможность одновременного наступления другого. Для элементарных событий несовместность — непреложное правило.

Для неэлементарных событий отношение несовместности не обязательно.

Например, событие  $A$  — «выпало четное число очков на игральном кубике» и событие  $B$  — «выпало число очков, кратное трем» совместны. Оба события наступают сразу при появлении на кубике шести очков.

На рисунке 21, *а* события  $A$  и  $B$  совместны (имеются общие точки); на рисунке 21, *б* события  $A$  и  $B$  несовместны.

6 общих точек у событий  $A$  и  $B$  на рисунке 21, *а* выделим в самостоятельное событие и назовем его *пересечением* событий  $A$  и  $B$ . Для обозначения используем символ пересечения множеств:  $\cap$ ; пересечение событий  $A$  и  $B$  запишем в виде:  $A \cap B$ . В том же (отнюдь не арифметическом) смысле иногда предпочитают сказать *произведение* вместо *пересечение*, а для упрощения записи символ  $\cap$  заменяют точкой ( $\cdot$ ).

*Пересечением или произведением событий  $A$  и  $B$  называется событие  $A \cap B$  (иначе  $A \cdot B$ ), состоящее из тех и только тех элементарных событий, которые являются общими для  $A$  и  $B$ .*

Наступило событие  $A \cap B$  — это значит произошло такое элементарное событие, которое входит и в множество  $A$ , и в множество  $B$  («слуга двух господ»). Для пересечения событий применимы три формы записи:

событие  $A \cap B$ , оно же  $A \cdot B$ , оно же  $A$  и  $B$ .

Вообще пересечением (произведением) событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называется событие  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ , короче:  $\bigcap_k A_k$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ , состоящее из всех тех исходов, которые являются общими для всех данных событий.

Для вычисления вероятности пересечения двух событий,  $P(A \cap B)$ , следует (согласно постулату 3) сложить вероятности, соотношенные элементарным событиям, общим для  $A$  и  $B$ .

Пусть 6 точек, расположенные на рисунке 21, *а* в заштрихованной области, изображают элементарные события  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ , тогда

$$P(A \cap B) = \sum_{i=1}^6 P(E_i).$$

Позже познакомимся и с более совершенным приемом вычисления  $P(A \cap B)$ .

У несовместных событий, например  $A$  и  $B$  на рисунке 21, *б*, общих точек нет, следовательно, пересечение таких событий является пустым множеством элементарных событий, т. е. невозможным событием ( $\emptyset$ ).

Если  $A$  и  $B$  — несовместные события, то

$$A \cap B = \emptyset \text{ и } P(A \cap B) = 0.$$

Эти формулы могут быть использованы и в качестве определения *несовместности событий*  $A$  и  $B$ .

Пусть  $\bar{A}$  — событие, противоположное событию  $A$ , тогда  $P(\bar{A} \cap A) = 0$ . (Спросите себя почему и ответьте.)

### ЛИБО ДОЖДИК, ЛИБО СНЕГ

Дождь ли пошел, или снег, либо то и другое сразу (бывает и так) — мы говорим: наступило ненастье.

Если из двух событий  $A$  и  $B$  осуществилось хотя бы одно — более подробно: или  $A$ , или  $B$ , или сразу и  $A$  и  $B$ , то мы скажем — *наступило событие  $C$ , называемое объединением событий  $A$  и  $B$ , а иногда суммой событий  $A$  и  $B$ .*

Объединение (сумма) событий  $A$  и  $B$  состоит из всех точек, составляющих событие  $A$ , и из всех точек, составляющих событие  $B$ ; точки, общие для событий  $A$  и  $B$ , считаются только один раз. Применяются три формы записи объединения (суммы) событий  $A$  и  $B$ :

событие  $A \cup B$ , оно же  $A + B$ , оно же  $A$  или  $B$ .

В таком же смысле следует понимать объединение (сумму)  $m$  событий, обозначаемое как

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ , короче:  $\cup A_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

В первом примере-иллюстрации (рис. 21, *а*) событие  $A$  состоит из 12 точек, событие  $B$  — из 15 точек, а событие  $A \cup B$  состоит из 21 точки. Во втором примере-иллюстра-

ции (рис. 21, б)  $A$  и  $B$  — несовместные события. В этом случае событие  $A \cup B$  состоит из суммы элементарных событий, определяющих отдельно  $A$  и  $B$  (общих событий нет). На основании постулата 3 имеем для несовместных событий

$$\| P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

**Ф о р м у л а с л о ж е н и я.** Полученное равенство называют формулой сложения вероятностей несовместных событий: *вероятность события, состоящего в том, что осуществится событие  $A$  или несовместное с ним событие  $B$ , равна сумме вероятностей этих событий.*

Аналогично, формула сложения для любого числа  $m$  несовместных событий  $A_1, A_2, \dots, A_m$  имеет вид

$$\| P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = \sum_{i=1}^m P(A_i).$$

**З а м е ч а н и е.** События  $A$  и  $\bar{A}$  всегда несовместны, причем  $A \cup \bar{A} = \Omega$ , следовательно,  $P(A \cup \bar{A}) = 1$ .

Изобретатели «алгебры событий» позаботились и о знаке равенства между событиями ( $A = B$ ), возложив на него иные, чем в арифметике, обязанности: информировать о том, что «равные» события являются набором одних и тех же элементарных событий.

Например, брошены два игральных кубика. События:  $A$  — «сумма выпавших очков не более трех» ( $2 + 1; 1 + 2$  и  $1 + 1$ ),  $B$  — «произведение — не более двух» ( $2 \cdot 1; 1 \cdot 2; 1 \cdot 1$ ). Сопоставляя, делаем вывод:  $A = B$ .

«Алгебра событий» является плацдармом для успешного решения задач, связанных с вычислением вероятности задуманного события, а подготовка такого плацдарма сходна с поисками кода зашифрованного текста — тем и увлекательна. Попрактикуйтесь немного в «разговоре» на языке этой своеобразной алгебры.

## И... И... ИЛИ... ИЛИ... — В СЕРИИ ПРИМЕРОВ

1. Отец играет с сыном в теннис до первого поражения сына. Каждая игра состоит из одного сэта. Событие  $A_i$  — выигрыш сыном  $i$ -го сэта ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ),  $\bar{A}_i$  — проигрыш сыном  $i$ -го сэта ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Выразить через  $A_i$  и  $\bar{A}_i$  следующие события:

$B$  — состоялась только одна игра;

$C$  — состоялось только три игры;

$D$  — состоялось не более трех игр.

Решение.  $B = \bar{A}_1$ ,  $C = A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$ , (первый и второй сеты сын выиграл, третий сет — проиграл),  $D = \bar{A}_1 + A_1 \cdot \bar{A}_2 + A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3$  (не более трех игр — значит: или только одна, проигранная сыном, или две — выиграна первая и проиграна вторая, или три — выиграна первая и вторая и проиграна третья).

2. Предполагается 5 бросков мяча в basketбольную корзину. Пусть события  $A_i$  означают:  $A_0$  — ни одного попадания в корзину,  $A_1$  — одно попадание в корзину и т. д. Что означают события:

$$B = A_0 + A_1 + A_2, C = A_3 + A_4 + A_5?$$

Решение.  $B$  — не более двух попаданий,  $C$  — не менее трех попаданий.

3. События:  $A$  — хотя бы одно из четырех проверяемых изделий дефектно,  $B$  — все изделия доброкачественные,  $C$  — дефектных изделий среди них не менее двух. Что означают события:

$$A_1 = A + B, A_2 = A \cdot B?$$

Описать события  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ .

Решение.  $A_1 = \Omega$  (достоверное),  $A_2 = \emptyset$  (невозможное).  $\bar{A} = B$ ,  $\bar{B} = A$ ,  $\bar{C}$  — дефектных изделий одно или нет ни одного.

4. В карточке спортлото наугад зачеркнуты два числа. Событие  $A$  — зачеркнуто хотя бы одно простое число, событие  $B$  — зачеркнуто хотя бы одно четное число. Что означают события

$$A_1 = A \cdot B, A_2 = A + B, A_3 = \bar{A} \cdot B, A_4 = \bar{A} \cdot \bar{B}?$$

Решение.  $A_1$  — осуществились оба события: и  $A$ , и  $B$ , т. е. из двух зачеркнутых чисел хотя бы одно простое и хотя бы одно четное, например 13 и 4, 13 и 2 (оба простые, из них одно четное), 34 и 2 (оба четные, из них одно простое),  $A_2$  — наступило хотя бы одно из событий  $A$  и  $B$ , т. е. среди двух зачеркнутых чисел имеется хотя бы одно простое, или хотя бы одно четное число, или хотя бы одно из них простое и хотя бы одно четное (3 и 41, 10 и 32, 2 и

40 и т. д.),  $A_3$  — осуществилось событие  $\bar{A}$ , противоположное событию  $A$  ( $\bar{A}$  — ни одного простого числа), и событие  $B$  (15 и 20, 4 и 6 и т. д.),  $A_4$  — ни одного простого числа и ни одного четного (15 и 21 и т. д.).

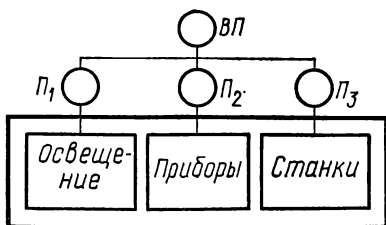


Рис. 22

5. В схеме распределения тока, подаваемого в мастерскую, предусмотрены четыре предохранителя (рис. 22). События:

- $A$  — перегорел входной предохранитель (В. П.),
- $B_i$  — перегорели предохранители  $\Pi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),
- $C$  — обесточена вся мастерская.

Распоряжаясь событиями  $A$ ,  $\bar{A}$ ,  $B_i$  и  $\bar{B}_i$ , выразить события  $C$  и  $\bar{C}$ .

Решение.  $C = A + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$ ,  $\bar{C} = \bar{A} \cdot (\bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3)$ .

Докажите самостоятельно, что для  $\bar{C}$  справедливо также

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B}_1 \cdot \bar{B}_2 \cdot \bar{B}_3.$$

**Задачи** (для самостоятельного решения). Пользуясь схемой точек и соответствующими определениями:

- а) доказать, что  $A + A = A$ ,  $A \cdot A = A$ ;
- б) доказать, что  $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$  и вследствие этого  $\bar{A} \cdot \bar{B} = \overline{A + B}$ ;
- в) выяснить возможность равенства  $A + B = A \cdot B$ ;
- г) выяснить, совместны ли события  $A$  и  $\overline{A + B}$ .

### ЭКЗАМЕН НАШЕЙ ИНТУИЦИИ

В узком отсеке прямоугольной коробки закреплены 5 разноцветных бусинок одинакового размера. Еще 5 таких же бусинок могут свободно перемещаться по широкому отсеку коробки (рис. 23, а).

После встряхивания коробку ставят закрепленными бусинками вниз. Тогда свободные бусинки располагаются над закрепленными, образуя второй слой.

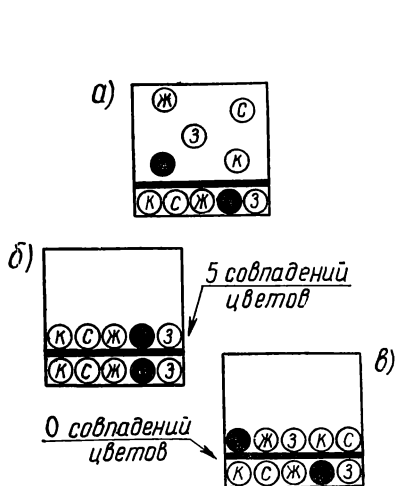


Рис. 23

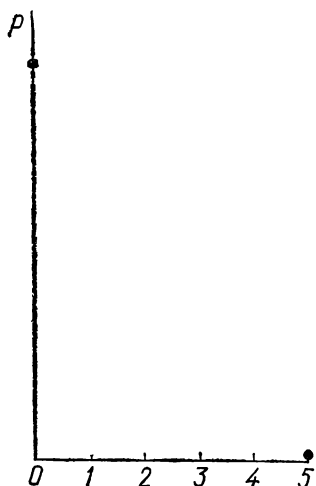


Рис. 24

Над каждой бусинкой нижнего ряда оказалась бусинка такого же цвета — образовалось 5 совпадений цветов, т. е. 5 одноцветных столбиков (рис. 23, б). Редкий случай! Из множества возможных расположений такое одно. Вероятность такого расположения пока не подсчитывайте, оцените «на глаз».

Другим крайним случаем, очевидно, будет событие «0 совпадений цветов», иначе говоря, «все столбики пестрые». Интуитивно ясно, что на рисунке 23, в представлено лишь одно из многих возможных расположений бусинок с полным несовпадением цветов.

Продолжим экзамен своей интуиции. Пусть точки, отмеченные на рисунке 24, изображают начало и конец графика вероятности совпадения цветов в парах бусинок, образующих столбики.

Как вы представляете (без предварительных вычислений) расположение остальных четырех промежуточных точек возможного графика, т. е. какую дадите сравнительную оценку вероятности четырех событий:

бусинки образовали какой-либо один одноцветный столбик, остальные четыре столбика пестрые;

бусинки образовали какие-либо два (три, четыре) одноцветных, остальные три (два, один) столбика пестрые?

Собственно нужен ответ только на такой вопрос: полагаете ли вы, что с возрастанием числа от 0 совпадений цветов до 5 совпадений соответствующие вероятности всегда уменьшаются, так что, например, 5 совпадений «еще менее вероятны», чем 4?

Как правило, ответ дают утвердительный. Проведите «статистику ответов» на этот вопрос среди своих товарищей и друзей. Проверьте и свои интуитивные представления посредством соответствующих вычислений.

**Решение.** Для размещения красной бусинки открыты все пять позиций. После выбора одной из них для синей бусинки остаются 4 позиции. Это дает  $5 \cdot 4 = 20$  способов размещения двух бусинок. Желтая бусинка выбирает одно место из оставшихся трех, а за ней и черная — одно место из двух. В сочетании с предыдущими комбинациями это дает  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$  способов размещения четырех, а следовательно, и пяти бусинок, так как после размещения четырех бусинок для пятой (зеленой) предопределено единственное место, оставшееся свободным.

Полагая все 120 возможных комбинаций элементарными событиями, можем считать их равновероятными.

Только одно из них благоприятствует пяти совпадениям цветов (событие  $A_5$ ), следовательно,  $P(A_5) = \frac{1}{120}$ .

Событие  $A_4$  — совпадение только четырех цветов есть невозможное событие. В самом деле, когда четыре бусинки нашли партнеров своей окраски, то и для пятой бусинки остается свободным единственное место против бусинки своей окраски, следовательно,  $P(A_4) = 0$ .

Пусть три бусинки из пяти нашли своих одноцветных партнеров — событие  $A_3$ . Один случай представлен на рисунке 25, а всего таких случаев  $C_5^3 = 10$ . Две оставшиеся бусинки только одним способом могут образовать два пестрых столбика

$\begin{pmatrix} \text{Ж} \\ \text{С} \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \text{С} \\ \text{Ж} \end{pmatrix}$ , следовательно,

$$P(A_3) = \frac{C_5^3 \cdot 1}{120} = \frac{10}{120}.$$

Пусть две бусинки из пяти нашли своих одноцветных партнеров — событие  $A_2$  (рис. 26). Число случаев  $C_5^2 = 10$ .



Рис. 25

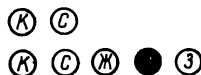
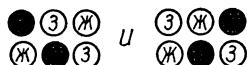


Рис. 26



Если остались, например, бусинки  $\textcircled{\text{Ж}} \textcircled{\text{З}} \textcircled{\text{З}}$ , то вместе с такими же тремя закрепленными бусинками они образуют только две комбинации пестрых столбиков:



Таким образом, событие  $A_2$  состоит из  $C_5^2 \cdot 2 = 20$  элементарных событий и  $P(A_2) = \frac{20}{120}$ .

Событие  $A_1$  — одно совпадение цветов; 5 бусинок — 5 случаев. Пусть совпали красные бусинки. Из оставшихся четырех пар бусинок возможно составить 9 комбинаций пестрых столбиков (составьте самостоятельно!), следовательно,  $P(A_1) = \frac{5 \cdot 9}{120} = \frac{45}{120}$ .

Осталось определить вероятность события  $A_0$  — «0 совпадений цветов». Проще это сделать по формуле сложения. События  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  несовместные и  $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \Omega$ . Следовательно,

$$P(A_0) = 1 - \sum_{i=1}^5 P(A_i) = 1 - \left( \frac{45}{120} + \frac{20}{120} + \frac{10}{120} + 0 + \frac{1}{120} \right) = \frac{44}{120}.$$

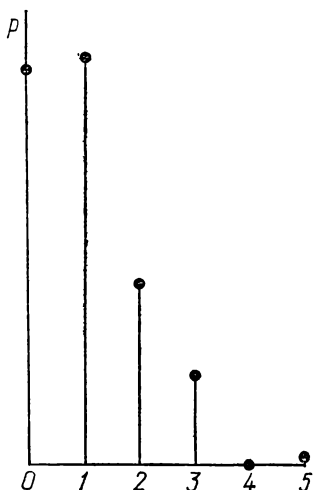


Рис. 27

(Найдите способ непосредственного вычисления числа элементарных событий, составляющих событие  $A_0$ .)

В соответствии с полученными результатами строим точный график вероятности совпадения цветов для заданных пяти бусинок (рис. 27).

Совпадает ли эта картина с первоначально возникшим у вас представлением об ожидаемом распределении вероятностей?

Аналогичная закономерность имеет место для любого числа  $n$  разноцветных бусинок.

## БЫВАЕТ И МЕЧТА ВЕРОЯТНОСТЬ МЕНЯЕТ

Перед соревнованием на личное первенство по спортивной гимнастике мы оценили вероятность каждой из восьми участниц занять первое место.

На рисунке 28 каждая гимнастка представлена кружком или квадратом, в котором записана соотношенная ей вероятность. Кружками выделены гимнастки общества «Спартак», квадратами — «Буревестник». Некоторые из участниц соревнования — ученицы средних школ. На рисунке отмечено буквой «У».

Пусть событие  $A$  — первое место заняла ученица, событие  $B$  — первое место заняла гимнастка общества «Буревестник».

Какова вероятность того, что первое место займет ученица (событие  $A$ )?

Применяя постулат 3, вычисляем:  $P(A) = 0,12 + 0,11 + 0,10 + 0,13 = 0,46$ .

Аналогично  $P(B) = 0,12 + 0,11 + 0,10 + 0,14 + 0,13 = 0,60$ .

Если первое место заняла ученица (событие  $A$ ) из общества «Буревестник» (событие  $B$ ), то произошло пересечение событий  $A$  и  $B$  и  $P(A \cdot B) = 0,12 + 0,11 + 0,10 = 0,33$ .

Заметим пока, что  $P(A \cdot B) \neq P(A) \cdot P(B)$ , хотя в другом, внешне аналогичном случае такое соотношение будет иметь место. Объяснение этому будет дано позже.

Предположим теперь, что в «игру случая» вклинилась мечта-гипотеза: одно из двух пересекающихся событий ( $A$  или  $B$ ) произошло прежде другого. И допустим, мечта стала былью — гимнастки «Спартака» по разным

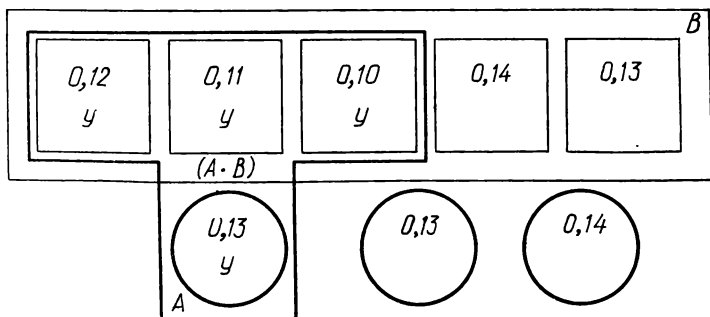


Рис. 28

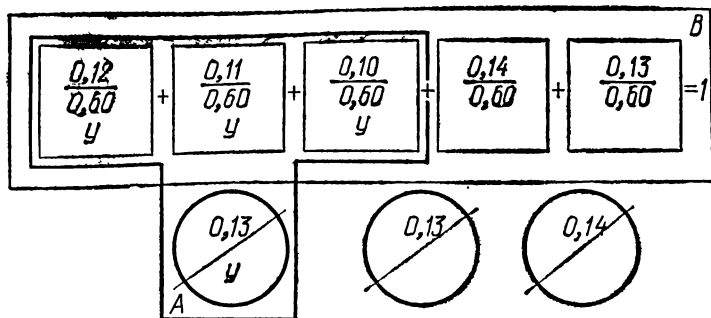


Рис. 29

причинам «вышли из игры». Это равносильно тому, что «произошло событие  $B$ » (рис. 29).

Изменится ли теперь наш прогноз о вероятности события  $A$ ?

Ответ не очевиден. Обратимся к вычислениям. Раз мы принимаем гипотезу-мечту о том, что событию  $A$  предшествовало событие  $B$ , то тем самым мы как бы отказываемся от прежнего ПЭС и заменяем его новым, состоящим только из тех элементарных событий, которые определяют событие  $B$ , становящееся достоверным. Прежнее значение вероятности события  $B$  ( $P(B)=0,60$ ) не соответствует его новому «рангу» и должно быть превращено в 1. Для этого, очевидно, достаточно прежнее значение вероятности каждого события, составляющего событие  $B$ , разделить на  $P(B) = 0,60$ .

Вероятность события  $A$ , вычисленную с учетом условия, что прежде произошло событие  $B$ , называют *условной вероятностью события  $A$*  («при гипотезе  $B$ ») и обозначают символом  $P(A, \text{если осуществилось } B)$ , короче:  $P(A/B)$ .

Применяя постулат 3, получаем:

$$P(A/B) = \frac{0,12 + 0,11 + 0,10}{0,60} = 0,55.$$

Такова «условная вероятность события  $A$ », т. е.  $P(A/B)$ .

Полезно заметить, что числитель  $0,12 + 0,11 + 0,10$  есть не что иное, как  $P(A \cdot B)$ , а знаменатель  $0,60$  есть  $P(B)$ , откуда

$$\parallel P(A/B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}. \quad (1)$$

Признано целесообразным принять эту формулу в качестве определения *условной вероятности*  $P(A/B)$ , если известно, что  $P(B) \neq 0$ .

Для того случая, когда  $B$  — невозможное событие, т. е. когда  $P(B) = 0$ , условные вероятности остаются неопределенными.

Переименуем событие  $A$  в  $B$ , а событие  $B$  в  $A$ . Понятно, что это не изменяет вероятности пересечения событий  $A$  и  $B$ . Тогда

$$\| P(B/A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}. \quad (2)$$

(теперь полагаем, что  $P(A) \neq 0$ ).

**Формула умножения.** В приложениях может оказаться более доступным непосредственный подсчет условной вероятности, тогда формулы (1) или (2) позволяют вычислить вероятность пересечения событий

$$\| P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B). \quad (3)$$

*Вероятность совместного появления (пересечения) двух событий  $A$  и  $B$  (события  $A \cdot B$ ) равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие наступило.*

**Пример.** Из урны, содержащей 4 белых шара и 6 черных шаров, вынимают наудачу один шар и, не возвращая его в урну, вынимают второй шар. Какова вероятность того, что оба раза будут вынуты белые шары?

**Решение.** Первоначально имеем 10 возможных исходов. Будем считать их случаями, т. е. равновероятными элементарными событиями. Событие  $A$  — появление белого шара в первый раз, событие  $B$  — появление белого шара во второй раз. Вероятность события  $A$ :  $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ .

Пусть теперь принята «гипотеза  $A$ », т. е. белый шар вынут. Для непосредственного вычисления  $P(B/A)$  — условной вероятности события  $B$  при условии, что событие  $A$  имело место — вновь образуем ПЭС. Составим его, например, из девяти возможных исходов (в урне теперь есть 9 шаров), считая их равновероятными элементарными событиями. Тогда

$$P(B/A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Вероятность совместного появления событий  $A$  и  $B$  (появление двух белых шаров за два последовательных вынимания) по формуле умножения равна:

$$P(A \cdot B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15} \approx 0,133.$$

Формула умножения вероятностей может быть распространена на любое число  $m$  событий  $A_1, A_2, \dots, A_m$

$$\| \quad P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_m) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \times \\ \times \dots \cdot P(A_m/A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{m-1}), \quad (4)$$

причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие произошли.

**Пример 1.** Слово «папах» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с буквами тщательно перемешиваются. Четыре карточки извлекаются по очереди и раскладываются в ряд. Какова вероятность получить таким путем слово «папа»?

**Решение.** Первоначально имеем 6 возможных исходов. Будем считать ПЭС, состоящим из шести случаев. Вероятность вытащить первую букву слова «папа» (событие  $A$ ) равна:

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Как отдельную решаем задачу на вычисление вероятности вытащить вторую букву слова «папа» (событие  $B$ ) при условии, что буква «п» вытащена. Для этого полагаем, что ПЭС состоит из пяти случаев (осталось 5 букв). Из них 3 благоприятствуют событию  $B$ . Так как в числе оставшихся пяти букв имеются три буквы «а», то  $P(B/A) = \frac{3}{5}$ .

Рассуждая и действуя аналогично, получаем вероятность вытащить третью букву слова «папа» (событие  $C$ ) при условии, что уже вытащены буквы «п» и «а»  $P(C/A \cdot B) = \frac{1}{4}$ .

Вытаскивание последней буквы слова «папа» (событие  $D$ ) определяется условной вероятностью  $P(D/A \cdot B \cdot C) = \frac{2}{3}$ . По обобщенной формуле (4) умножения вероятностей получим:

$$P(A \cdot B \cdot C \cdot D) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cdot B) \cdot P(D/A \cdot B \cdot C) = \frac{1}{30}.$$

**Пример 2.** В лотерее продается  $n$  билетов, из которых  $m$  выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея  $k$  билетов?

**Решение.** Пусть  $A_i$  обозначает событие, состоящее в том, что выигрывает  $i$ -й билет ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), и пусть  $A$  обозначает задуманное событие — «хотя бы один билет выигрывает». Тогда

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_k \text{ и } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \\ &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2/\bar{A}_1) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_k/\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_{k-1}) = \\ &= 1 - \frac{n-m}{n} \cdot \frac{n-m-1}{n-1} \cdot \frac{n-m-2}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-m-k+1}{n-k+1}. \end{aligned}$$

**Студент на экзамене.** Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.

**Решение.** Вероятность того, что первый вопрос, заданный студенту, выбран из числа тех, которые он знает, равна  $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ , условная вероятность того, что и второй вопрос из категории знакомых, равна  $\frac{19}{24}$ ; условная вероятность «везения» на третьем вопросе при условии, что первые два вопроса были знакомыми студенту, равна  $\frac{18}{23}$ .

По теореме умножения искомая вероятность равна:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115} \approx 0,5.$$

Нетрудно решить эту задачу и с помощью нашей первоначальной «технологии», обращаясь к ПЭС, содержащему и все те элементарные события, которые благоприятствуют непосредственному появлению интересующего нас события.

На этом пути решения полагаем, что число всех исходов равно  $n = C_{25}^3$ ; все они равновероятны, и число элементарных событий, составляющих искомое событие, равно  $m = C_{20}^3$ , откуда

$$p = \frac{1}{n} \cdot m = \frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{57}{115}.$$

## ДЕКЛАРАЦИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ

Пусть события  $A$  и  $B$  совместны — имеют общие точки в пространстве элементарных событий. Каждое из них само по себе обладает определенной ненулевой вероятностью  $P(A)$  и  $P(B)$ .

Так, в примере с гимнастками-ученицами (соб.  $A$ )  $P(A) = 0,46$  и гимнастками — членами общества «Буревестник» (соб.  $B$ )  $P(B) = 0,60$ . Это как бы «безусловные» вероятности событий  $A$  и  $B$ . И мы наблюдали воздействие на вероятность события  $A$  сообщения о предшествующем наступлении события  $B$ . Возникающая при этом условная вероятность  $P(A/B)$  вычисляется непосредственно или по формуле (1).

В примере с гимнастками  $P(A/B) = 0,55$ . Замечаем, что  $P(A/B) \neq P(A)$ .

Такое воздействие возможного наступления события  $B$  на прогнозирование наступления события  $A$  несомненно означает наличие какой-то специфической зависимости между событиями. И если бы когда-то оказалось, что

$$P(A/B) = P(A) \text{ и } P(B/A) = P(B),$$

мы могли бы провозгласить полную вероятностную независимость событий  $A$  и  $B$ .

Значит, если в заданных условиях событие  $A$  не зависит от события  $B$  в том смысле, что наступление или ненаступление события  $B$  не влияет на вероятность события  $A$ , то условная вероятность события  $A$  при условии, что имело место событие  $B$ , совпадает с вероятностью события  $A$ :

$$P(A/B) = P(A).$$

Это условие сразу приводит к упрощению формулы (3) для вычисления вероятности пересечения (произведения) двух событий:

$$P(A \cdot B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B).$$

О получившемся равенстве  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$  говорят, что оно симметрично относительно  $A$  и  $B$  (переименование  $A$  в  $B$  и  $B$  в  $A$  не изменяет формулы). Это указывает на то, что из независимости  $A$  от  $B$  следует и независимость  $B$  от  $A$ .

Кроме того, у нас теперь появилась еще и формула умножения независимых событий  $A$  и  $B$ :

$$\parallel P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (5)$$

*Вероятность совместного появления (пересечения) независимых событий равна произведению вероятностей появления каждого события в отдельности.*

Но и вне связи с физическими условиями возникновения двух событий принято приклеивать ярлычок «независимые» к любым событиям

$A$  и  $B$ , для которых выполняется соотношение (5). Так, декларация независимости двух событий провозглашена.

Убедимся в существовании пары событий, для которых выполняется равенство (5), другими словами, независимость которых была бы установлена при помощи вычислений.

Вновь пригласим на соревнования гимнасток «Буревестника» (6 квадратов) и «Спартака» (4 кружка). Ученицы отмечены буквой «У» (рис. 30). Приз ученице — событие  $A$ , приз члену общества «Буревестник» — событие  $B$ . Пусть для простоты все 10 элементарных событий равновероятны.

В овале — 5 «У», следовательно,  $P(A) = \frac{5}{10} = 0,5$ .

В прямоугольнике — 6 квадратов, следовательно,  $P(B) = 0,6$ .

В «пересечении» овала и прямоугольника — 3 общих элемента, следовательно,  $P(A \cdot B) = 0,3$ .

Получилось, что  $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ , следовательно, события  $A$  и  $B$  независимы.

Еще пример. Из колоды, содержащей 36 карт, наугад вытягивается одна карта. Событие  $A$  состоит в том, что это «пика», а событие  $B$  — в том, что это «дама». Являются ли независимыми эти события?

Здесь ответ, основанный лишь на физической интуиции, явился бы не более, чем угадыванием. А для вычислений мы имеем достаточно данных. В колоде 9 карт — «пики», поэтому  $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ .

Вероятность  $P(B)$  (вытянуть из колоды одну из имеющихся четырех «дам») есть  $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ . Событие — вытянуть

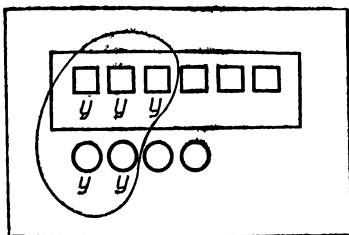


Рис. 30



«даму пик» есть пересечение событий  $A$  и  $B$ . Так как «дама пик» в колоде одна, то  $P(A \cdot B) = \frac{1}{36}$ .

Видим, что имеет место равенство

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad \left( \frac{1}{36} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} \right).$$

Следовательно, события  $A$  и  $B$  являются независимыми.

### РАССМОТРИМ ДЕЛА ЖИТЕЙСКИЕ

**Поиски нужной книги.** Студент, разыскивая специальную книгу, решил обойти 3 библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в ее фондах книга или нет. Если книга есть в фонде, то одинаково вероятно, занята она другим читателем или нет. Что более вероятно: найдет студент книгу или нет? (Библиотеки комплектуются книгами независимо одна от другой.)

**Решение.** Событие  $A_i$  — книга есть в  $i$ -й библиотеке ( $i = 1, 2, 3$ ), событие  $B$  — книга не занята читателем, событие  $C_i$  — студент получит книгу в  $i$ -й библиотеке. По условию  $P(A_i) = P(B) = \frac{1}{2}$ .

Чтобы студент получил книгу в  $i$ -й библиотеке, она должна быть в библиотеке и быть не занята, поэтому

$$P(C_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Вероятность того, что студент не получит книгу

$$P(\bar{C}_i) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Студент не получит книгу ни в одной библиотеке — событие  $\bar{C}_1 \cdot \bar{C}_2 \cdot \bar{C}_3$ . Вероятность этого события равна  $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$ .

Противоположное событие — студент получит книгу. Вероятность этого события равна  $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3$ .

Вероятность того, что студент найдет и получит книгу  $\left(\frac{37}{64}\right)$ , все же немного больше вероятности того, что он не найдет нужную книгу  $\left(\frac{27}{64}\right)$ .

**Папа, мама и я.** — Тебе — коллекционеру — несомненно приятно будет получить имеющийся у меня экземпляр редкой почтовой марки, — сказал мне отец, но поставил условие: выиграть в шахматы подряд две партии из трех, играя поочередно с ним и с мамой по одной партии в день.

— С кем мне играть первую партию: с тобой или мамой?

— Выбирай сам, — ответил папа, хитро улыбаясь.

Какая последовательность игр: папа — мама — папа (ПМП) или мама — папа — мама (МПМ) дает мне большую вероятность «завоевать» марку для коллекции, если папа более сильный партнер, чем мама.

**Р е ш е н и е.** Интуитивно ясно, что последовательность ПМП обещает больше шансов на победу, чем МПМ, так как, во-первых, вторую партию необходимо выиграть, иначе не будет двух побед подряд, поэтому вторую партию лучше играть с более слабым партнером; во-вторых, поскольку значения вероятностей выигрыша не заданы, то можно в решении опираться на простейший частный случай, например на предположение о том, что вероятность выигрыша у мамы равна 1; тогда для получения двух побед подряд достаточно хотя бы раз выиграть у папы. Проверим интуицию вычислениями.

Пусть событие  $A$  — мой выигрыш у папы, событие  $B$  — у мамы и соответственно  $P(A) = p_1$ ,  $P(B) = p_2$ . Событие  $C$  — выиграть два раза подряд в последовательности игр ПМП — равно:  $C = A \text{ и } B \text{ и } A \text{ или } A \text{ и } B \text{ и } \bar{A} \text{ или } \bar{A} \text{ и } B \text{ и } A$ , короче:  $C = A \cdot B \cdot A = A \cdot B \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot B \cdot A$ .

Применяя теоремы сложения и умножения, получаем:

$$P(C) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_1 + p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - p_1) + (1 - p_1) \cdot p_2 \cdot p_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot (2 - p_1).$$

Аналогично, событие  $D$  — выиграть два раза подряд в последовательности игр МПМ — равно:

$$D = B \cdot A \cdot B + B \cdot A \cdot \bar{B} + \bar{B} \cdot A \cdot \bar{B} \quad \text{и}$$

$$P(D) = p_2 \cdot p_1 \cdot p_2 + p_2 \cdot p_1 \cdot (1 - p_2) + (1 - p_2) \cdot p_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot (2 - p_2).$$

По условию  $p_2 > p_1$  (вероятность моего выигрыша у мамы больше вероятности выигрыша у папы). Следовательно,  $2 - p_1 > 2 - p_2$  и  $P(C) > P(D)$ .

Схема: играть первую партию с более сильным партнером, вторую — с более слабым и третью — снова с более

сильным дает больше шансов на получение желанной коллекционной марки.

**Судьба бактерий.** За некоторый промежуток времени бактерия может погибнуть с вероятностью  $\frac{1}{4}$ , выжить с вероятностью  $\frac{1}{4}$ , разделиться на две с вероятностью  $\frac{1}{2}$ .

В следующий промежуток времени с каждой бактерией происходит то же самое. Сколько бактерий и с какими вероятностями будут существовать к концу второго промежутка времени?

**Решение.** К концу второго периода времени окажется:

- 0 бактерий — событие  $A_0$ ,
- 1 бактерия — событие  $A_1$ ,
- 2 бактерии — событие  $A_2$ ,
- 3 бактерии — событие  $A_3$ ,
- 4 бактерии — событие  $A_4$ .

$A_0$  = (бактерия погибнет сразу) **или** (выживет и затем погибнет) **или** (разделится и погибнет первая и погибнет вторая). Применяя теоремы сложения и умножения, получаем:  $P(A_0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{32}$ .

Удобная и наглядная форма решения — построение «дерева» с записью соответствующих вероятностей на соединительных линиях. Точка — живая бактерия,  $\otimes$  — погибшая бактерия (рис. 31).

Аналогичными «деревьями» выразим остальные варианты событий (рис. 32).

**Случайность отвергнута?** — Я вычислил: случайности нет, все события достоверны, — торжественно заявил однажды на математическом кружке Вадим Погорелов.

— Подбрасываю идеальный игральный кубик. Бесспорно, что вероятность появления 1 равна  $\frac{1}{6}$ . При вторичном

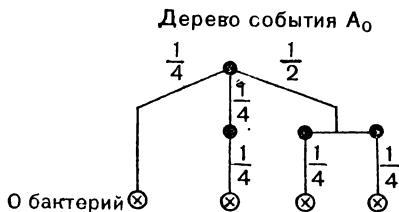
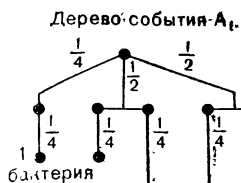
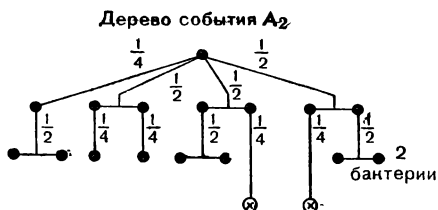


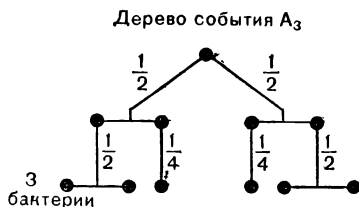
Рис. 31



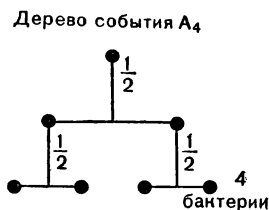
$$P(A_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$



$$P(A_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{32}$$



$$P(A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{8}$$



$$P(A_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Рис. 32

подбрасывании — тоже. Значит, если подбросить кубик дважды, то вероятность появиться единице хотя бы один раз (при первом подбрасывании или при втором) равна  $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ . Считая аналогично для шести подбрасываний кубика, получим, что вероятность выпадения 1 хотя бы один раз из шести достигает единицы  $\left(\frac{1}{6} \cdot 6\right)$ . Так же рассуждая относительно каждого другого числа очков на кубике, придем к выводу, что вероятность появления любого из них равна единице, т. е. выпадение любого числа очков при шестикратном подбрасывании кубика является достоверным событием.

Что вы скажете по поводу этих рассуждений?

**Решение.** Допущена ошибка в применении алгебры событий. «Хотя бы один раз» при двух подбрасываниях — это значит: выпала единица в первый раз и не выпала во второй  $\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}\right)$ , или не выпала в первый раз и выпала во второй  $\left(+\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)$ , или выпала в первый раз и во второй

$\left(+\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)$ . Соответствующая вероятность равна  $\frac{5}{36} \cdot 2 + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$ , а не  $\frac{1}{3}$ , как считал Вадим.

Более простой вариант применения алгебры событий — вычислить вероятность события — «ни одного раза в двух подбрасываниях», противоположного задуманному событию — «хотя бы один раз».

Событие «ни одного раза» означает: не выпала единица при первом подбрасывании  $\left(\frac{5}{6}\right)$  и не выпала при втором подбрасывании  $\left(\frac{5}{6}\right)$ . Вероятность этого события равна  $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ ; тогда вероятность задуманного события  $1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ . Для шести подбрасываний кубика вероятность задуманного события равна  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$ , т. е. весьма далека от единицы — вероятности достоверного события.

Не менее забавна попытка чисто эмоционального отрицания случайности. Известная в прошлом, уже канувшая в Лету, дискуссия между приверженцами двух крайних метафизических взглядов на случайность:

1) только случайность господствует в мире;

2) «нет ничего случайного в этой природе» (Гольбах) — получила опозитизированную, слегка ироничную интерпретацию в стихотворении нашего современника, французского поэта Луи Ле Кенфа (в переводе Н. Разговорова).

#### «Опровержение»

Случайно все — философ учит нас.

Случаен моего рожденья час,

Случаен век и родина моя,

И сам я только тень в пустыне бытия.

И небо из одной холодной пустоты,

И незачем к нему стремить свои мечты.

И жизнь — случайных дней слепая череда

Всего лишь навсего — дорога в никуда.

Мы встретились с тобой. И мне открылась тайна:

Я знаю, что ничто на свете не случайно.

Если отнестись к этому стихотворению не только как к галантной шутке поэта, то придется признать, что не открылась поэту «тайна» (истина). Словно бы отвечая поэ-

ту, говорит об этом наш маститый ученый-математик, академик Б. В. Гнеденко: «Отрицание случайного не может превратить случайное в необходимое, оно остается и играет центральную роль в познании окружающего нас мира».

## ОБЪЕДИНЕНИЕ (СУММА) СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Пользуясь алгеброй событий, мы упрощаем технологию вычисления вероятности какого-либо задуманного события, представляя его в виде пересечения (произведения) и объединения (суммы) таких событий, вероятности которых известны или могут быть легко вычислены. Так появились в нашем распоряжении формулы

*умножения* (зависимых и независимых событий),

*сложения* (пока только не совместных событий).

Рассмотрим способ вычисления вероятности объединения (суммы) совместных событий.

Пусть  $A$  и  $B$  — совместные события. Вычислим  $P(A) + P(B)$ . Для наглядности обратимся к обычной схеме точек — элементарных событий, образующих некоторое ПЭС (рис. 33).

12 точек определяют событие  $A$  и 9 точек — событие  $B$ . Сумма чисел 12 и 9 дает 21, но 4 точки — общие для  $A$  и  $B$  — считались дважды. Следовательно, и в сумму  $P(A) + P(B)$  дважды войдут вероятности точек, общих для  $A$  и  $B$ , т. е. точек, определяющих событие  $A \cdot B$ .

С другой стороны, вычисляя  $P(A \cup B)$ , также надо складывать вероятности всех точек, составляющих собы-

тия  $A$  и  $B$ , но точки, общие для  $A$  и  $B$ , считать только один раз. Поэтому  $P(A) + P(B)$  больше, чем  $P(A \cup B)$  на величину  $P(A \cdot B)$ , откуда

$$\| P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (6)$$

Такова формула, выражающая вероятность объединения произвольных событий  $A$  и  $B$  через вероятности каждого из этих событий и их пересечения.

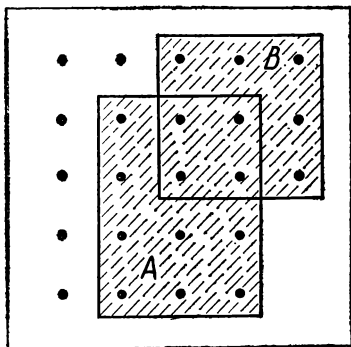


Рис. 33

В частности, если события  $A$  и  $B$  несовместны, то  $A \cdot B = \emptyset$  и  $P(A \cdot B) = 0$ , и мы получаем знакомую формулу сложения

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

для несовместных событий  $A$  и  $B$ .

**Пример.** Возьмем следующее пространство элементарных событий: все целые числа интервала  $[1: 20]$ ; каждому событию припишем  $p = \frac{1}{20}$ .

Событие  $A$  — «число делится на 2». В интервале  $[1, 20]$  таких чисел десять, следовательно,  $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ .

Событие  $B$  — «число делится на 3». Таких чисел шесть: 3, 6, 9, 12, 15, 18, следовательно,  $P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ .

Событие  $A \cdot B$  — «число делится одновременно на 2 и на 3». Таких чисел три: 6, 12, 18, следовательно,

$$P(A \cdot B) = \frac{3}{20}.$$

Событие  $A \cup B$  — «число делится на 2 или на 3 или сразу на 2 и на 3». Вычислим  $P(A \cup B)$  по формуле (6):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}.$$

Проверим непосредственным подсчетом. Событие  $A \cup B$  объединяет 13 чисел: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20; следовательно,

$$P(A \cup B) = \frac{13}{20}.$$

### СОБЫТИЕ ПОЯВЛЯЕТСЯ $m$ РАЗ, НЕ МЕНЕЕ $m$ РАЗ...

В практике часто приходится иметь дело с многократным повторением одного и того же опыта по возможности в одних и тех же условиях.

Повторяющиеся испытания, в каждом из которых может произойти или не произойти случайное событие  $A$ , называются независимыми по отношению к событию  $A$ , если вероятность события  $A$  в каждом испытании не зависит от того, появилось или не появилось это событие в других испытаниях (предшествующих или последующих).

Повторные независимые испытания называются *испытаниями Бернулли*, если при каждом испытании возможны только два исхода («Успех» и «Неудача») и вероятности каждого из этих исходов постоянны, т. е. от испытания к испытанию не меняются.

Пусть вероятность «Успеха»  $P(Y) = p$ , тогда вероятность «Неудачи», очевидно, будет  $P(N) = 1 - p$ . Для дальнейшего введем обозначение  $1 - p = q$ .

Нас может интересовать вероятность появления «Успеха» (события  $Y$ )  $p$  о в н о  $m$  раз в данной серии из  $n$  независимых испытаний, обозначим ее  $P_n(m)$ , или вероятность появления «Успеха» в данной серии испытаний не м е н е е  $m$  раз, обозначим ее  $R_n(m)$ .

Например, при синтезировании в лабораторных условиях вещества, имеющего забавное наименование «8-оксихинолин», может случайно произойти весьма не забавное явление — взрыв. И хотя вероятность этой опасности в отдельном опыте не велика (0,02), все же исследователю, осуществляющему подряд 10 раз синтез «8-оксихинолина», необходимо предвидеть вероятность, например, ровно трех взрывов или вероятность того, что в серии из 10 синтезов взрыва не произойдет.

Формула решения подобных задач разработана Я. Бернулли.

Вероятность  $P_n(m)$  того, что  $n$  испытаний Бернулли приведут  $m$  раз к успеху, равна:

$$\| P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m! (n-m)!} p^m q^{n-m}, \quad (7)$$

где  $p$  и  $q = 1 - p$  соответственно вероятности «Успеха» и «Неудачи» в каждом испытании.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим вероятность комбинированного события  $A_1$ , состоящего в следующем: в одном из  $n$  испытаний (не обязательно в первом) наступил «Успех» и еще в одном из  $n$  испытаний наступил «Успех» и т. д., всего в  $m$  каких-то о п р е д е л е н н ы х испытаниях наступил «Успех», и еще в каждом из о с т а л ь н ы х  $n - m$  испытаниях (также вполне определенных) наступила «Неудача». Из этого описания события  $A_1$  видно, что оно является пересечением  $m$  событий «У» и  $n - m$  событий «Н», причем все события взаимно независимы.

Следовательно, по формуле умножения

$$P(A_1) = p^m \cdot q^{n-m}.$$



Комбинированное событие  $A_1$  определяется указанием номеров испытаний, в которых наступило событие «У»; оно может быть, например, таким:

$$\underbrace{У \cdot У \cdot \dots \cdot У}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{Н \cdot Н \cdot \dots \cdot Н}_{n-m \text{ раз}}.$$

Возможны и другие последовательности пересечений  $m$  событий «У» и  $n - m$  событий «Н», соответствующие условию теоремы. Все они будут отличаться от события  $A_1$  и друг от друга только набором номеров тех испытаний, в которых осуществляется событие «У». Количество  $L$  различных вариантов выбора  $m$  номеров испытаний из последовательности  $n$  испытаний равно, очевидно, числу сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ , т. е.

$$L = C_n^m = \frac{n!}{m! (n - m)!}.$$

Все эти  $L$  событий, назовем их  $A_1, A_2, \dots, A_L$ , несовместны. Появление любого из них: или события  $A_1$ , или события  $A_2$ , или ..., или события  $A_L$ , в качестве результата серии из  $n$  испытаний, означает, что наступило событие  $B$  — «событие У в  $n$  испытаниях появилось  $m$  раз». Таким образом, задуманное нами событие  $B$  является объединением событий  $A_1, A_2, \dots, A_L$ , имеющих одну и ту же вероятность

$$p^m q^{n-m}.$$

По формуле сложения вероятностей вероятность объединения несовместных событий равна сумме их вероятностей, следовательно,

$$\begin{aligned} P_n(m) &= P(B) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_L) = \\ &= L \cdot p^m \cdot q^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### Ч а с т н ы е с л у ч а и.

1. Вероятность  $P_n(n)$  успеха  $n$  раз в  $n$  испытаниях равна:

$$P_n(n) = p^n.$$

2. Вероятность неудачи  $n$  раз в  $n$  испытаниях (0 раз «Успех») равна:  $P_n(0) = q^n$ .

3. Вероятность  $R_n(m)$  успеха не менее  $m$  раз в  $n$  испытаниях равна:

$$R_n(m) = P_n(m) + P(m+1) + \dots + P_n(n),$$

иначе

$$R_n(m) = \sum_{i=m}^n P_n(i),$$

где

$$P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}, \quad i = m, m+1, \dots, n.$$

Опять-таки, если применить переход к противоположному событию («Успех менее  $m$  раз в  $n$  испытаниях»), то

$$R_n(m) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} P_n(i).$$

Рассмотрим несколько задач.

**Синтез «8-оксихинолина».** Как было сказано, вероятность случайного взрыва при синтезе этого вещества равна  $p = 0,02$ .

Вычислить  $P_{10}(3)$ ,  $P_{10}(0)$  и  $R_{10}(1)$ .

**Решение.** Применяя соответствующие формулы, получаем:

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 p^3 q^7 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} 0,02^3 \cdot 0,98^7 \approx 0,00083.$$

Вероятность того, что взрыва не будет ни разу,

$$P_{10}(0) = 0,98^{10} \approx 0,82,$$

$$R_{10}(1) = 1 - P_{10}(0) \approx 1 - 0,82 = 0,18 \approx 0,2.$$

**Экономьте электроэнергию.** Расход электроэнергии на протяжении суток не превышает установленной нормы с вероятностью  $p = \frac{3}{4}$ . Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход энергии не будет превышать нормы в течение 4 суток.

**Решение.** Расход электроэнергии в течение суток считаем испытанием. Успехом в этом испытании является отсутствие перерасхода электроэнергии

$$P(Y) = p = \frac{3}{4}, \quad P(H) = q = \frac{1}{4}.$$

Тогда

$$P_6(4) = C_3^4 \cdot p^4 \cdot q^2 = 15 \cdot \frac{3^4}{4^6} \approx 0,3.$$

**Всхожесть семян.** Всхожесть данной партии семян некоторого растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

Решение. а)  $p = 0,9$ ,  $q = 0,1$ ,  $P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot 0,9^3 \cdot 0,1 \approx 0,3$ ;  
б)  $R_4(3) = P_4(3) + P_4(4) \approx 0,3 + 0,9^4 \approx 0,95$ .

**Контроль долгодействия.** Для проверки партии изготовленных конденсаторов на продолжительность их пригодности берут выборку (например, 100 штук) и ставят под напряжение на определенный срок.

— Что покажет практическая проверка, посмотрим, — сказал нам лаборант. — А вероятностный прогноз ожидаемых результатов, упрощенно говоря, таков: *два шанса против одного*, что за испытательный срок «пробитыми» окажутся не более трех конденсаторов, если считать, что каждый конденсатор с вероятностью 0,97 «непробиваем» за установленный промежуток времени.

— Какое число конденсаторов (в среднем) могут отказать за контрольный срок? — спросил лаборанта кто-то из нас.

— Для биномиального распределения вероятностей, получающегося в известных вам «испытаниях Бернулли», вычислить ожидаемое «среднее число успехов» ( $\bar{x}$ ) вы можете мгновенно по формуле

$$\bar{x} = np,$$

где  $n$  — число независимых испытаний, производимых в одинаковых условиях;  $p$  — вероятность успеха в любом отдельном испытании. Но «успехом» придется здесь считать «пробиваемость» конденсатора.

Первое утверждение лаборанта (о соотношении шансов) проверьте, пользуясь известной вам формулой (7); мы здесь действительно имеем дело с «испытанием Бернулли».

Не может не привлечь нашего внимания и такая изящная формула, которую упомянул лаборант  $\bar{x} = np$  (изящество — в ее простоте).

Вывод этой формулы описан в главе «Полезные средние» (см. с. 145). Ну, а пока, законно полагая, что этой формулы мы еще не знаем, полезно вычислить интересующее нас «среднее» хотя бы способом «прикидки», осуществляемой в рамках разумно допускаемых упрощений.

**Р е ш е н и е.** Событие  $A$  — «пробито» не более трех конденсаторов в ста испытаниях — наступит при осуществлении одного из четырех событий:

$$A_0 \text{ или } A_1 \text{ или } A_2 \text{ или } A_3,$$

что значит: «пробито»

0 или 1 или 2 или 3 конденсатора.

Эти события несовместные, поэтому

$$P(A) = \sum_{i=0}^3 P(A_i).$$

Так как вероятность успеха  $p = 0,03$  и неуспеха  $q = 0,97$ , то по формуле (7) имеем:

$P_{100}(0) = 0,97^{100} \approx 0,05$  (применялись таблицы логарифмов),

$$P_{100}(1) = 100 \cdot 0,03 \cdot 0,97^{99} \approx 0,15,$$

$$P_{100}(2) = C_{100}^2 \cdot 0,03^2 \cdot 0,97^{98} \approx 0,22,$$

$$P_{100}(3) = C_{100}^3 \cdot 0,03^3 \cdot 0,97^{97} \approx 0,23,$$

$$P(A) \approx 0,05 + 0,15 + 0,22 + 0,23 = 0,65.$$

Вероятность этого события (0,65) приблизительно в два раза больше вероятности противоположного события:  $P(\bar{A}) \approx 1 - 0,65 = 0,35$ , поэтому лаборант и сказал: «два шанса против одного». Точнее, «13 шансов против 7», так как  $0,65 : 0,35 = 13 : 7$ .

Выполним подсчет ожидаемого «среднего числа» отказавших конденсаторов.

Мы должны учитывать, что отказать могут 0, 1, 2, ..., 100 конденсаторов, и знать относительную частоту каждого из этих событий. Имеем 101 событие ( $A_0, A_1, \dots, A_{100}$ ) и вычисленные вероятности событий  $A_0, A_1, A_2$  и  $A_3$ . По той же формуле Бернулли найдем еще

$$P(A_4) \approx 0,17, \quad P(A_5) \approx 0,10, \quad P(A_6) \approx 0,05.$$

Вероятность того, что за испытательный срок откажут более чем 6 конденсаторов, очень невелика. Она равна  $1 - (0,65 + 0,17 + 0,10 + 0,05) = 0,03$  и «распределяется» фактически между 94 событиями ( $A_7, A_8, \dots, A_{100}$ ). Намереваясь ограничиться лишь прикидкой, эти события отбро-

сим, считая их *практически невозможными*. Вероятности с е м и допущенных событий ( $A_0, A_1, \dots, A_6$ ) будем рассматривать как относительные частоты. Поясним это. Вообразим, что 100 конденсаторов испытывали 100 раз. При этом

15 раз  $\left(p_1 = \frac{15}{100}\right)$  оказывался поврежденным один конденсатор,  $15 \cdot 1 = 15$  штук,

22 раза  $\left(p_2 = \frac{22}{100}\right)$  оказывались поврежденными 2 конденсатора,  $22 \cdot 2 = 44$  штуки,

23 раза  $\left(p_3 = \frac{23}{100}\right)$  оказывались поврежденными 3 конденсатора,  $23 \cdot 3 = 69$  штук и т. д.

Общее число поврежденных конденсаторов за 100 испытаний:

$$15 + 44 + 69 + 68 + 50 + 30 = 276.$$

Среднее число поврежденных конденсаторов  $\frac{276}{100} \approx 3$  шту-

ки. По формуле  $\bar{x} = n \cdot p$  получаем точно 3.

**Шахматный матч.** Играются шесть партий между двумя шахматистками Аней и Лизой. Считаются только победы и поражения. В случае ничьей партия не имеет порядкового номера и переигрывается. Вероятность выигрыша каждой отдельной партии Аней равна  $\frac{2}{3}$ . Вероятность выигрыша

каждой отдельной партии Лизой равна  $\frac{1}{3}$ . Чему равна вероятность выигрыша всей игры Аней, Лизой и ничейного результата?

**Р е ш е н и е.** Победит в матче Аня, если она выиграет 4, 5 или 6 партий. Вероятность этого события по формуле Бернулли и формуле сложения равна:

$$P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = C_6^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_6^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{2^4}{3^6} (15 + 12 + 4) \approx 0,68.$$

Для Лизы вероятность победы в матче равна:

$$P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 + C_6^1 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \frac{2}{3} + C_6^2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{73}{729} \approx 0,1.$$

Вероятность ничьей равна:

$$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \approx 0,22.$$

Хотя для Ани вероятность выиграть каждую отдельную партию вдвое больше, чем для Лизы, матч она выигрывает у Лизы с вероятностью, почти в 7 раз большей, чем вероятность того, что Лиза выигрывает матч у Ани. Для Лизы вероятность закончить матч с Аней вничью вдвое выше вероятности выйти победительницей.

З а д а н и е (для самостоятельного решения). Что вероятнее выиграть в шахматы у равносильного партнера:

а) три партии из четырех или пять из восьми;

б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

О т в е т. а) Три партии из четырех ( $P_4(3) > P_8(5)$ );

б)  $R_8(5) > R_4(3)$ .

### ВЕЛИКАЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА КАК ЗАДАЧА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Известно, что никто еще не опроверг и не доказал полностью утверждение Ферма о невозможности найти хотя бы одну тройку целых положительных чисел  $x$ ,  $y$  и  $a$ , удовлетворяющих уравнению

$$x^n + y^n = a^n, \quad (8)$$

где натуральное  $n > 2$ .

Любопытную интерпретацию дал этой теореме американский математик Е. С. Молин (в 1946 г.), перефразировав ее как задачу теории вероятностей.

В барабанчик заложено  $x$  белых шаров и  $y$  черных. Ясно, что  $x$  и  $y$  — целые положительные числа. Если  $n$  раз вытаскивать из барабанчика по одному шару, с возвращением его в барабанчик перед каждым последующим вытаскиванием, то вероятность того, что все  $n$  раз будут вытащены белые шары, равна  $\left(\frac{x}{x+y}\right)^n$ .

Соответственно вероятность того, что все  $n$  раз будут вытащены черные шары, равна  $\left(\frac{y}{x+y}\right)^n$ .

Оба упомянутых события несовместны, следовательно, вероятность того, что вынутые шары будут все белыми или все черными, по формуле сложения равна:

$$p = \left(\frac{x}{x+y}\right)^n + \left(\frac{y}{x+y}\right)^n.$$

Разделим обе части заданного уравнения (8) на  $(x+y)^n$ :

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^n + \left(\frac{y}{x+y}\right)^n = \left(\frac{a}{x+y}\right)^n. \quad (9)$$

Значит, левую часть получившегося уравнения (9) можно понимать как число  $p$ .

Пусть теперь изменен состав содержимого барабанчика так, что  $a$  шаров стали белыми и  $b$  — черными, но при этом общее число шаров осталось неизменным:

$$a + b = x + y.$$

Из барабанчика с новым составом шаров вновь производим  $n$  вытаскиваний по одному шару с возвращением. Тогда вероятность того, что все вынутые шары окажутся белыми, равна:

$$p' = \left(\frac{a}{a+b}\right)^n = \left(\frac{a}{x+y}\right)^n.$$

А это есть правая часть уравнения (9). Поэтому запись теоремы Ферма приобретает следующий вид:

$$p = p',$$

и тем самым сводится к требованию: доказать, что невозможно изменить состав содержимого барабанчика так, чтобы при  $n > 2$  имело место равенство  $p = p'$ , а следовательно и исходное равенство (8).

### НАИЛУЧШАЯ СТРАТЕГИЯ ИГРЫ

В компании с друзьями, дома или в школе, проведите игру, интерес которой в выборе «оптимальной стратегии».

Заложите в барабанчик и перемешайте три одинаковые шашки. Основания шашек предварительно обработайте так, чтобы у одной были оба основания черные, у другой — одно основание черное, второе — белое, у третьей — оба основания белые (рис. 34). Ведущий вынимает одну шашку



Рис. 34

наугад и, не разглядывая ее (т. е. также наугад), одно из оснований показывает играющим.

Предлагается играющим угадать цвет противоположного основания, обращенного к ведущему (белое оно или черное?)

Сеанс состоит из 10 игр. Ответы регистрируются. Выигрывает игру тот, кто угадал более пяти раз.

Чтобы быть в этой игре победителем чаще своих друзей, вам следует заранее подготовиться: вскрыть вероятностные основы игры и наметить для себя, когда вы будете не ведущим, а играющим, определенную, обоснованную систему угадывания (стратегию игры).

Может быть, лучше всего не придерживаться никакой системы угадывания — называть цвет скрытого основания шашки наугад, не думая.

Кстати говоря, математики и «бессистемность» возвели в ранг системы — разработали новое сильное направление исследований случайного, названное *рэндомизацией*, от английского *at random* — наугад.

Кроме системы угадывания *at random*, можно придумать много других, как с использованием, так и без использования полученной информации о цвете основания, показанного играющим.

Например, возможны такие стратегии:

назвать показанный цвет, а затем чередовать, например, так:

(А) ● ○ ● ○ ... (черный, белый, черный, ...),

не глядя на показанный цвет, всякий раз называть

(В) ● ● ● ● ... (черный, черный, ...),

(С) ○ ○ ○ ○ ... (белый, белый, ...),

(D) называть черный до первого угадывания; после этого говорить белый опять до первого угадывания и т. д.,

(Е) называть всякий раз показанный цвет,

(F) называть всякий раз не тот цвет, который показан.



Придумайте другие стратегии и докажите, что нет более надежной, чем стратегия (Е), а самая плохая — стратегия (F).

**Решение.** В любой попытке угадать скрытый цвет вероятность успеха ( $p$ ) не больше, чем  $\frac{2}{3}$ , и не меньше, чем  $\frac{1}{3}$ .

Если назовем увиденный цвет, то скрытый цвет угадаем с вероятностью  $\frac{2}{3}$ , так как у двух шашек из трех противоположные основания одноцветны.

Если назовем не тот цвет, который показан, то вероятность успеха —  $\frac{1}{3}$  (у одной шашки из трех основания разноцветны).

Если же назовем скрытый цвет наугад (не глядя на показанный), то вероятность успеха равна  $\frac{1}{2}$  (скрытым основанием шашки может оказаться любое из трех черных и любое из трех белых).

Рассуждая иначе, скажем так: условия игры позволяют образовать пространство из шести элементарных событий. Действительно, есть три возможности выбрать одну шашку из трех и два способа показать игрокам одно из ее оснований — всего 6 событий, появлению каждого из которых можно сопоставить вероятность, равную  $\frac{1}{6}$ .

Из них 4 (убедитесь!) обеспечивают угадывание, если называть показанный цвет (стратегия Е), что дает вероятность успеха  $p = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$  и неуспеха  $q = \frac{1}{3}$  в каждой игре. Бóльшая, чем  $\frac{2}{3}$ , вероятность успеха в отдельной игре невозможна, следовательно, стратегия (Е) оптимальна.

Аналогично выясняется, что стратегия (F) наихудшая: вероятность успеха в каждой игре минимальна ( $\frac{1}{3}$ ), следовательно, минимальна и вероятность победы в серии игр.

Стратегии (B) и (C) обеспечивают каждую игру также постоянной вероятностью успеха, равной  $\frac{1}{2}$ . Но  $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} <$

$< \frac{2}{3}$ , следовательно, стратегии (В) и (С) хуже, чем (Е), но лучше, чем (F).

Такова же и стратегия (D) (сообразите почему?).

Стратегия (А) начинается, как (Е), а продолжается, как (В) или (С), следовательно, вероятность успеха в первой игре равна  $\frac{2}{3}$ , а в остальных играх той же серии  $\frac{1}{2}$ .

Как распределяются вероятности между количествами всех возможных удач от наименьшего их числа (0) до наибольшего (10) для стратегии (Е) с  $p = \frac{2}{3}$ ,  $q = \frac{1}{3}$  и стратегий с  $p = \frac{1}{2}$ ,  $q = \frac{1}{2}$ , показано в таблице:

| Число удач<br>Для стратегий                    | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|--|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| (Е)  | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,02 | 0,06 | 0,14 | 0,23 | 0,26 | 0,20 | 0,09 | 0,02 |
| имеющей<br>$p = q = 0,5$<br>для каждой<br>игры | 0,00 | 0,01 | 0,04 | 0,12 | 0,21 | 0,24 | 0,21 | 0,12 | 0,04 | 0,01 | 0,00 |

Числовые значения вероятностей, заполняющие таблицу, являются, согласно формуле Бернулли, соответствующими членами разложения биномов

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^{10} \text{ и } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Результаты вычислений округлены до второго десятичного знака.

Например, вероятность угадать 7 раз из 10 при применении стратегии (Е) равна:

$$P_{10}(7) = C_{10}^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \approx 0,26 \text{ (проверьте!).}$$

Из таблицы видно, что игрок, применивший стратегию (Е), может надеяться выиграть 8 раз из 10, так как  $0,23 + 0,26 + 0,20 + 0,09 + 0,02 \approx 0,8$ , и проиграть однаж-

ды, так как  $0,02 + 0,06 = 0,08 \approx 0,1$ . Для применившего стратегию (F) — все наоборот.

В случае применения любой из остальных стратегий удачного угадывания можно ожидать (конечно, в среднем) не более чем в четырех играх из десяти.

Итак, вы — теоретически подготовленный (или подготовленная) — пригласили друзей на сеанс, состоящий из 10 игр, и применяете наилучшую стратегию. А «повезло» не вам, а кому-то другому, кто угадывал цвет скрытого основания шашки «как попало» и все же угадал, скажем, 6 раз из 10, а вы — только 4. Могло случиться такое событие? Может случай оказаться сильнее наших теоретических прогнозов?

Конечно, может. Но вы теперь достаточно подготовлены к тому, чтобы не думать, что «математика посрамлена» и спокойно отразить возможный выпад коварного случая, понимая, что его произвол господствует лишь в единичном, уступая место предсказанной закономерности при многократном повторении сеансов игр. Заручитесь предварительным согласием друзей на некоторую серию сеансов игр и теория восторжествует непременно.

### НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОЕ ЧИСЛО УСПЕХОВ

Рассмотрим  $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$  — вероятность того, что в  $n$  испытаниях Бернулли наступит  $m$  успехов — как функцию натурального аргумента  $m$ , включая и  $m = 0$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, n - 1, n$ .

В предыдущей задаче-игре эта функция предстала перед нами в одном своем частном облике. Взгляните на таблицу ее значений (с. 113). Сначала они возрастают вместе с увеличением аргумента  $m$ , затем, перевалив через некоторый максимум, уменьшаются.

Покажем, что такое поведение функции  $P_n(m)$  закономерно и в общем случае. Составим отношение:

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{C_n^{m+1} \cdot p^{m+1} \cdot q^{n-m-1}}{C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}.$$

(Убедитесь в том, что дробь  $\frac{C_n^{m+1}}{C_n^m}$  после сокращения равна  $\frac{n-m}{m+1}$ .)

Из неравенств:

а)  $\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} \geq 1$ , откуда  $m \leq np - q$  и  
 $P_n(m+1) \geq P_n(m)$ ,

б)  $\frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} < 1$ , откуда  $m > np - q$  и  
 $P_n(m+1) < P_n(m)$  —

следует:

если  $m < np - q$ , т. е. при увеличении  $m$  от 0 до  $np - q$ ,  
функция  $P_n(m)$  возрастает,

при  $m = np - q$  (если  $np - q$  целое неотрицательное) —  
 $P_n(m+1) = P_n(m)$ ,

если  $m > np - q$ , т. е. при дальнейшем увеличении  $m$ ,  
функция  $P_n(m)$  убывает.

Целое число  $m_0$ , при котором вероятность  $P_n(m)$  достигает наибольшего значения, называют наиболее вероятным или *наивероятнейшим числом успехов*.

Возможны два случая:

а)  $m = np - q$  — целое число, тогда целым числом будет и  $m + 1$ ;  $m + 1 = np + (1 - q) = np + p$ , где  $1 - q = p$ ; оба эти числа ( $m = np - q$  и  $m + 1 = np + p$ ) равноправно представляют наивероятнейшее число успехов, причем

$$P_n(np - q) = P_n(np + p);$$

б)  $np - q$  — нецелое, тогда нецелым числом будет и  $np - q + 1 = np + p$ . Между этими нецелыми числами имеется лишь одно целое значение  $m_0$  аргумента, большее, чем  $np - q$  и меньшее, чем  $np + p$ , т. е. имеется единственное значение  $m$ , являющееся наивероятнейшим числом успехов; число  $m_0$  есть целый корень двойного неравенства

$$np - q < m_0 < np + p.$$

**Соревнования в стрельбе по летящим тарелочкам.** Пускают вверх одну за другой 50 тарелочек и по каждой тарелочке спортсмен делает один выстрел из охотничьего ружья. Вероятности попадания равны: для первого стрелка 0,9, для второго 0,95, для третьего 0,85. Вычислить наиболее вероятное число тарелочек, пораженных каждым стрелком.

**Решение.** Для лучшего стрелка (№ 2):  $p = 0,95$ ,  $q = 0,05$ ,  $np - q = 50 \cdot 0,95 - 0,05 = 47,45$ ,  $np + p = 50 \cdot 0,95 + 0,95 = 48,45$ , следовательно,  $m_0 = 48$ .

Аналогичные решения для стрелков № 1 и № 3 выполните самостоятельно.

**Сколько нужно посеять семян?** Их всхожесть 75%. Наивероятнейшим числом невзошедших семян данного сорта полагают 60.

**Решение.**  $p = \frac{1}{4}$ ,  $q = \frac{3}{4}$ ,  $m_0 = 60$ ; требуется найти  $n$ , удовлетворяющее неравенствам:

$$\frac{1}{4}n - \frac{3}{4} \leq 60 \leq \frac{1}{4}n + \frac{1}{4};$$

$$n - 3 \leq 240 \Rightarrow n \leq 243, \quad n + 1 \geq 240 \Rightarrow n \geq 239; \\ 239 \leq n \leq 243.$$

Теперь агроному, поставившему задачу, мы можем предложить выбор из пяти значений  $n = 239, 240, 241, 242, 243$ , удовлетворяющих требованию иметь число 60 в качестве наивероятнейшего числа невзошедших семян. Правда, при  $n = 239$  получается еще второе наивероятнейшее число семян — 59 и при  $n = 243$  также возможны два наивероятнейших числа — 60 и 61 (убедитесь в этом!), что, строго говоря, не предусмотрено условием задачи.

Но так как речь идет о наивероятнейшем числе невзошедших семян, то, может быть, и неплохо иметь «в запасе» второе возможное значение  $m_0$ , меньшее, чем 60, которое получается при  $n = 239$ .

**О т в е т:**  $n_1 = 240$ , или  $n_2 = 241$ , или  $n_3 = 242$ .

**Мяч в корзине.** Баскетболист всякий раз забрасывает мяч в корзину с вероятностью  $0,7 \div 0,9$ . Найти наивероятнейшее число попаданий при 15 бросках. (Символ  $\div$  означает: «от» и «до»).

**О т в е т:**  $11 \div 14$ .

**Стандартная деталь.** а) Вероятность производства стандартной детали в некоторых условиях равна 0,98. Найти наивероятнейшее число стандартных деталей среди 625 деталей.

б) Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной, равна 0,1.

**О т в е т:** а) 613; б) 55.

**Разве измеришь без погрешности?** Результат измерения либо немного больше истинного значения, что создает положительную погрешность, либо немного меньше истинного

значения, что создает отрицательную погрешность измерения. Пусть вероятность положительной погрешности равна  $\frac{2}{3}$ , а отрицательной  $\frac{1}{3}$  в каждом измерении.

Найти наименее вероятные числа положительных и отрицательных погрешностей и соответствующую вероятность при четырех измерениях.

Ответ:  $m_{0+} = 3$ ,  $m_{0-} = 1$ ,  $p = \frac{32}{81}$ .

## БИНОМ НЬЮТОНА ИЗ ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ

Одним из проявлений увлеченности математикой является желание узнать, нет ли, кроме изученных, других подходов к решению задачи, доказательству теоремы, выводу формулы.

Так, например, хорошее понимание смысла и назначения формулы Бернулли о вероятности  $P_n(m)$  иметь  $m$  успехов в  $n$  независимых испытаниях прокладывает прямую тропинку к доказательству справедливости формулы разложения бинома Ньютона  $(a + b)^n$  для любых  $a$ ,  $b$  и натурального  $n$ .

Пусть в  $n$  независимых испытаниях успех имеет место  $m$  раз с вероятностью  $p$  в каждом испытании и неудача имеет место  $n - m$  раз с вероятностью  $q = 1 - p$  в каждом испытании. По формуле  $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$  можно вычислить

$P_n(0)$  — вероятность события  $A_0$  — 0 успехов в  $n$  испытаниях,

$P_n(1)$  — вероятность события  $A_1$  — 1 успех в  $n$  испытаниях,

$P_n(2)$  — вероятность события  $A_2$  — 2 успеха в  $n$  испытаниях и т. д. и, наконец,

$P_n(n)$  — вероятность события  $A_n$  —  $n$  успехов в  $n$  испытаниях.

Ясно, что  $A_0, A_1, \dots, A_n$  — несовместные события и их объединение (сумма) образует достоверное событие, поэтому

$$\sum_{m=0}^n P_n(m) = 1. \quad (10)$$

Из  $q = 1 - p \Rightarrow p + q = 1$ , откуда следует, что и

$$(p + q)^n = 1. \quad (11)$$

Сравнивая равенства (10) и (11), заключаем, что

$$(p + q)^n = \sum_{m=0}^n P_n(m) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m}. \quad (12)$$

А это и есть формула разложения бинома Ньютона для частного случая

$$a + b = 1 \text{ при } 0 \leq a \leq 1 \text{ и } 0 \leq b \leq 1.$$

Обобщим формулу (12) сначала на случай произвольных положительных  $a$  и  $b$ .

Сумму  $a + b$  умножим и разделим на  $c = a + b$ ,

$$c \cdot \left( \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right)^n.$$

Тогда

$$(a + b)^n = c^n \cdot \left( \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right)^n.$$

Законно положить  $\frac{a}{c} = p$  и  $\frac{b}{c} = q$ , так как  $\frac{a}{c} < 1$ ,  $\frac{b}{c} < 1$  и  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1$ .

Тогда

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= c^n (p + q)^n = c^n \cdot \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = \\ &= c^n \cdot \sum_{m=0}^n C_n^m \left( \frac{a}{c} \right)^m \left( \frac{b}{c} \right)^{n-m} = c^n \cdot \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{a^m b^{n-m}}{c^n}. \end{aligned}$$

После сокращения на  $c^n$  получаем:

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m},$$

что и требовалось доказать для случая, когда  $a$  и  $b$  положительные.

Пусть теперь  $a < 0$  и  $b < 0$ . Это значит, что  $c = a + b$  также отрицательно, но  $p = \frac{a}{c}$  и  $q = \frac{b}{c}$  оба положительны, следовательно, выведенная формула бинома Ньютона имеет место и в случае отрицательных  $a$  и  $b$ .

Пусть, наконец,  $a$  и  $b$  разных знаков. Достаточно ограничиться дополнительным соглашением:  $a + b > 0$ , от-

куда  $a > -b$ . Положим для определенности, что  $a > 0$  и выберем положительное  $c$  такое, что  $-b < c < a$ . Тогда

$$a + b = (a - c) + (b + c).$$

Так как слагаемые в скобках оба положительны, то на основании доказанного

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m (a - c)^m (b + c)^{n-m}.$$

Левая часть этого равенства не зависит от  $c$ , поэтому и в правой части после раскрытия скобок и приведения подобных членов останется только сумма

$$\sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}.$$

Осталось разобрать случай, когда хотя бы одно из чисел  $a$  или  $b$  равно нулю. Пусть, например,  $b = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m} &= \sum_{m=0}^n C_n^m a^m \cdot 0^{n-m} = C_n^n a^n \cdot 0^0 = a^n = \\ &= (a + 0)^n = (a + b)^n, \end{aligned}$$

так как  $0^0 = 1$ . Следовательно, формула разложения бинома Ньютона верна и в этом случае.

Так, формула бинома Ньютона окончательно обоснована для произвольных  $a$ ,  $b$  и натурального  $n$ .

### НЕМНОГО О ЧИСЛЕ $e$ И «ЗАКОНЕ РЕДКИХ ЯВЛЕНИЙ»

Есть некоторая «загадочность» в поведении функции  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , или, скажем, ее частного случая — бинома  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  где  $n$  — натуральное число.

При  $n = 1$  значением бинома является число 2; при  $n = 2$  — число  $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$ ; при  $n = 3$  — число  $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2,37 \dots$



Эти и еще несколько вычисленных значений бинома сведем в таблицу:

| $n$                              | 1 | 2    | 3     | 10    | 100   | 1000  |
|----------------------------------|---|------|-------|-------|-------|-------|
| $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ | 2 | 2,25 | 2,370 | 2,594 | 2,705 | 2,717 |

Получается достаточно отчетливое представление о монотонном, но постепенно замедляющемся возрастании последовательности значений бинома  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

Для решения многих проблем математики и наук, применяющих математику, важно было установить, какое число является пределом последовательности значений бинома, убедившись предварительно в принципиальном существовании того, что ищешь, т. е. в том, что существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Вот тут и выяснилось, что предел есть, но при помощи конечного количества цифр его не запишешь; этот предел оказался числом иррациональным.

Пришлось ввести обозначение буквой. Эйлер для этого избрал букву  $e$ , так что

$$\parallel \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Дополнения к сказанному приведены в последней главе книги.

Есть способы вычислить значение константы  $e$  с точностью до любого десятичного знака. Первые цифры таковы:

$$e = 2,71828...$$

Число  $e$  оказалось полезным в качестве основания степени (показательная функция  $e^x$ ) и основания логарифмов ( $\log_e x$ ).

Логарифм при основании  $e$  называется *натуральным* и обозначается  $\ln x$ .

**Замечание.** Если взять бесконечную последовательность степенных функций вида:  $1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \dots, \frac{x^n}{n!}, \dots$  и образовать последовательность многочленов:  $S_0(x) = 1, S_1(x) = 1 + x, S_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \dots, S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ , то оказывается, что, каким бы ни было значение  $x$ , последовательность чисел  $S_0(x), S_1(x), S_2(x), \dots, S_n(x)$  «сходится» при  $n \rightarrow \infty$  к соответствующему значению функции  $e^x$ .

Это достоверное «предельное» событие обычно выражают следующей формулой

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < \infty).$$

Вывод этой формулы оставим за рамками данной книги.

На знаменитых людей рисуют дружеские шаржи, а знаменитые константы делают предметом шуточных стихов.

Например, в переводе с английского:

Это малое  $e$   
 Так не нравится мне.  
 Если честно сказать,  
 Можно только назвать  
 Неприличным его поведение.

*Дж. А. Линдон*

И... шуточных подражаний шутивным стихам:

Это славное  $e$  ( $e = 2,71828\dots$ )  
 Помогает вполне  
 Уяснить вам и мне  
 Год рожденья Толстого Л. Н. \_\_\_\_\_ ↑

Число  $e$ , как и  $\pi$ , принадлежит к классу трансцендентных чисел. Это значит, что невозможно составить такое алгебраическое уравнение с рациональными коэффициентами, корнем которого было бы число  $e$ . Разумеется, и это утверждение строго доказано математиками.

Впрочем, каждый из нас без больших усилий подберет алгебраическое уравнение, приближенным корнем которого является число  $e$ , взятое с пятью, шестью известными цифрами после запятой. Но попробуйте при этом добиться

целых и не очень больших по модулю коэффициентов, например, как в следующих двух квадратных уравнениях:

$$27x^2 - 55x - 50 = 0$$

— один его корень  $x_1 \approx 2,71829$  только в пятом десятичном знаке расходится с числом  $e$ ;

$$35x^2 - 83x - 33 = 0$$

— у корня  $x_1 \approx 2,7182858$  расхождение с числом  $e$  начинается лишь с шестого десятичного знака.

В математике и ее приложениях к техническим наукам немало формул, содержащих константу  $e$ . Одна из них — формула Пуассона, заменяющая формулу Бернулли для вычисления  $P_n(m)$  в тех случаях практики, когда значения  $n$  велики при небольших значениях  $m$  и малой вероятности  $p$ :

$$\| P_n(m) \approx \frac{(n \cdot p)^m}{m! e^{n \cdot p}}. \quad (13)$$

В статистике эту формулу нередко называют законом редких явлений.

Интересующимся выводом формулы Пуассона следует обратиться к учебникам по теории вероятностей.

Формула Пуассона<sup>1</sup> (13), в частности, применяется в статистическом контроле качества для вычисления вероятности обнаружить  $m$  дефектных изделий среди  $n$  взятых из контрольной партии, если доля брака  $p$  в контролируемой партии очень мала.

**Транспортные потери.** Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна 0,0002. Какова вероятность того, что на базу придут ровно 3 поврежденных изделия?

**Решение.** Вычислим  $np = 5000 \cdot 0,0002 = 1$ . По формуле (13) имеем:

$$P_{5000}(3) \approx \frac{1^3}{3!e} = \frac{1}{6} \cdot e^{-1} \approx \frac{1}{6} \cdot 0,368 \approx 0,06.$$

---

<sup>1</sup> Пуассон С. (1781—1840).

# 3

## ПОЛЕЗНЫЕ «СРЕДНИЕ»

Холодные числа, внешне сухие формулы математики полны внутренней красоты и жара сконцентрированной в них мысли.

А. Д. Александров («Поэзия науки», «Известия», 10 марта, 1964)

## ЧИСЛОВАЯ ФУНКЦИЯ НА МНОЖЕСТВЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ

При однократном подбрасывании монеты возможны два элементарных события:  $E_1$  — монета легла гербом вверх и  $E_2$  — монета легла вверх цифрой. Отобразив множество событий  $\{E_1, E_2\}$  на множество чисел  $\{0; 1\}$  при помощи

соглашения 
$$\begin{array}{|c|} \hline E_1 \\ E_2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 0 \\ \hline \end{array},$$

мы «научили» монету быть генератором случайных чисел (с. 59). Это соглашение, кроме того, пополняет семейство знакомых нам функций еще одной — числовой функцией  $\{0; 1\}$ , определенной на множестве элементарных событий  $\{E_2; E_1\}$ . Обозначим ее буквой  $X$  и символом  $\xi(E_i)$ ,

$$X = \xi(E_i), i = 1, 2.$$

Такую функцию естественно назвать *случайной величиной*. Ее возможные значения известны: 0 и 1, но какое из них «объявится» в наблюдаемом явлении подбрасывания монеты, определяется случаем, как случайно и появление событий  $E_1$  и  $E_2$ .

**Пример 1.** В некоторых спортивных играх принято присуждать за выигрыш 2 очка, за ничью 1 очко и за проигрыш 0 очков. Можно сказать так: в пространстве, содержащем три элементарных события — выигрыш ( $E_1$ ), ничья ( $E_2$ ), проигрыш ( $E_3$ ), задана числовая функция  $X = \xi(E_i)$ ,

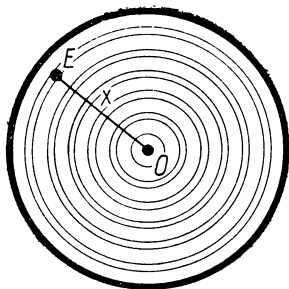


Рис. 35

совокупностью значений которой являются числа 2, 1, 0, а именно:

$$\begin{aligned}\xi(E_1) &= 2, \quad \xi(E_2) = 1, \\ \xi(E_3) &= 0.\end{aligned}$$

Функция  $X$  определена на заданном множестве элементарных событий, но и она является величиной случайной в связи с тем, что случайно появление событий  $E_1, E_2, E_3$ .

**Пример 2.** Расстояние  $X$  от точки попадания  $E$  до центра мишени  $O$  (рис. 35) есть числовая функция, значения которой зависят от элементарных событий  $E_i$  ( $E_i$  — точка попадания при  $i$ -м выстреле), причем значением функции  $X$  может быть любое число  $x \geq 0$ ,  $X$  — *случайная величина*.

Числовая функция  $X$ , значения которой отнесены к каждому из событий  $E \in \Omega$ , называется случайной величиной

$$X = \xi(E), E \in \Omega.$$

Если все значения случайной величины можно перечислить или каждому значению  $X$  приписать порядковый номер ( $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ), то такую случайную величину называют *дискретной*.

В примере 2 случайная величина  $X$  — расстояние до центра мишени — не является дискретной.

Примеры дискретной случайной величины: число отказов аппарата при  $n$  испытаниях, количество бракованных изделий в выборке, состоящей из 100 образцов, и другие.

В силу определения случайной величины сложение, умножение и другие действия с такими величинами осуществляются как с функциями.

Примеры приведем позже.

Всякому случайному событию  $A$  соответствует случайная величина — числовая функция  $\chi_A$  (греческая буква «хи»), определенная равенствами

$$\chi_A(E_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } E_i \in A, \\ 0, & \text{если } E_i \in \bar{A}. \end{cases}$$

Каждое значение этой функции показывает, наступило или не наступило событие  $A$ , поэтому функцию  $\chi_A(E_i)$  называют *характеристической функцией события  $A$* .

Для двух событий  $A$  и  $B$  имеют место следующие тождества:

- 1)  $\chi_A(E_i) = 1 - \chi_{\bar{A}}(E_i)$ ;
- 2)  $\chi_A(E_i) \cdot \chi_B(E_i) = \chi_{A \cap B}(E_i)$ ;
- 3)  $\chi_A(E_i) + \chi_B(E_i) - \chi_{A \cap B}(E_i) = \chi_{A+B}(E_i)$ .

Проверим справедливость второго:

$$\begin{aligned} \chi_A(E_i) \cdot \chi_B(E_i) &= \begin{cases} 1 \cdot 1, & \text{если } E_i \in A \text{ и } B, \\ 0 \cdot 0, & \text{если } E_i \in \bar{A} \text{ и } \bar{B}, \\ 1 \cdot 0, & \text{если } E_i \in A \text{ и } \bar{B}, \\ 0 \cdot 1, & \text{если } E_i \in \bar{A} \text{ и } B \end{cases} = \\ &= \chi_{A \cap B}(E_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } E_i \in A \cap B, \\ 0, & \text{если } E_i \in \bar{A} \cap \bar{B}, \\ 0, & \text{если } E_i \in A \cap \bar{B} \text{ и } \bar{A} \cap B. \end{cases} \end{aligned}$$

Смысл и значение этих тождеств состоит в том, что они позволяют действия над событиями заменить некоторыми действиями над характеристическими функциями этих событий.

### РАСПРЕДЕЛЯЕМ ВЕРОЯТНОСТИ: КОТОРОМУ — СКОЛЬКО?

Всякий раз, когда дискретная случайная величина  $X$  принимает определенные значения  $x_1, x_2, \dots$ , мы будем это отмечать записью:

$$X = x_1, X = x_2, \dots$$

Каждое такое равенство удобно рассматривать как осуществление какого-либо события — элементарного или составного (в числе которых может быть невозможное и достоверное). Вероятность  $p$  того, что случайная величина  $X$  приняла значение  $x_i$ , будем обозначать так:

$$P(X = x_i) = p.$$

Зная вероятности элементарных событий, на множестве которых задана числовая функция — дискретная случайная величина  $X$ , можно определить вероятность каждого из ее значений и результат свести в таблицу вида:

|   |       |       |     |       |     |       |
|---|-------|-------|-----|-------|-----|-------|
| Определенные различные значения случайной величины      | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_l$ | ... | $x_n$ |
| Вероятности соответствующих значений случайной величины | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_l$ | ... | $p_n$ |

При условии, что в таблицу включаются все н е р а в н ы е друг другу значения величины  $X$ , и т о л ь к о о н и, такая таблица является выражением закона *распределения дискретной случайной величины*.

Так как объединение всех несовместных событий  $X = x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , обязано быть достоверным событием  $\Omega$ , то сумма всех вероятностей, внесенных в таблицу, равна 1,

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Это свойство «таблицы распределения» позволяет контролировать правильность ее составления.

**П р и м е р.** Дано  $X = \xi(E_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . Пусть случайная величина  $X$  такова, что

$$\begin{aligned} \xi(E_1) = 1, \quad \xi(E_2) = 0, \quad \xi(E_3) = 1, \quad \xi(E_4) = 1, \\ \xi(E_5) = 0. \end{aligned}$$

Как видно, дискретная случайная величина  $X$  принимает только два различных значения:  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 1$ .

Для заданной случайной величины принята гипотеза о том, что вероятности элементарных событий, взятых в порядке возрастающих их номеров, убывают в арифметической прогрессии, причем  $P(E_1) = 0,3$ . Найдем вероятности остальных элементарных событий.

По условию первый член арифметической прогрессии  $p_1 = 0,3$ , сумма  $S_5 = \frac{(2p_1 + 4d) \cdot 5}{2}$ ;  $d$  — разность арифметической прогрессии.

Так как ПЭС состоит из пяти элементарных событий, то  $S_5 = 1$ ,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(0,6 + 4d) \cdot 5}{2}, \quad d = -0,05, \quad \text{откуда } P(E_1) = 0,3, \quad P(E_2) = \\ &= 0,25, \quad P(E_3) = 0,2, \quad P(E_4) = 0,15, \quad P(E_5) = 0,1. \end{aligned}$$

При наступлении события  $E_2$  или события  $E_5$  случайная величина  $X = 0$ , следовательно,  $P(X = 0) = 0,25 + 0,1 = 0,35$ . При наступлении событий  $E_1$  или  $E_3$  или  $E_4$ ,  $X = 1$ , следовательно,  $P(X = 1) = 0,3 + 0,2 + 0,15 = 0,65$ . Закон распределения случайной величины  $X$ :

|     |      |      |
|-----|------|------|
| $X$ | 0    | 1    |
| $P$ | 0,35 | 0,65 |

**Осторожно — впереди инерция аналогии!** Вы проверяете 5 приборов последовательно и независимо один от другого, но каждый следующий прибор испытываете только в том случае, когда предыдущий оказался надежным. Требуется составить таблицу распределения случайного числа испытаний, если для каждого прибора вероятность выдержать испытание равна 0,9.

Подробное решение задачи далее изложено, но непременно следует прежде убедиться в успехе (или, увы, неудаче) собственных рассуждений.

**Решение.**  $X$  — число испытаний (1, 2, 3, 4 или 5). Если первый из проверяемых приборов оказался ненадежным, испытание прекращается (например, вы приступаете к ремонту неисправного прибора).

Тогда  $P(X = 1) = 1 - 0,9 = 0,1$ .

Далее, пусть первый прибор выдержал испытание ( $p = 0,9$ ), а второй — нет ( $q = 0,1$ ). Тогда  $P(X = 2) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09$ .

Если ненадежным оказался только третий по порядку испытания прибор, то  $P(X = 3) = 0,9^2 \cdot 0,1 = 0,081$ ,  $P(X = 4) = 0,9^3 \cdot 0,1 = 0,0729$ .

Не исключено, что на некотором этапе последовательно-го вычисления вероятностей событий  $X = 1$ ,  $X = 2$ ,  $X = 3$ , ... в рассуждения включится аналогия — прием полезный, необходимый и ... опасный своей инерционной силой. Так, например, вполне возможно, что, подметив закономерность в последовательности полученных результатов  $P(X = 2) = 0,9 \cdot 0,1$ ,  $P(X = 3) = 0,9^2 \cdot 0,1$ ,  $P(X = 4) = 0,9^3 \cdot 0,1$ , кто-нибудь по инерции продолжит:  $P(X = 5) = 0,9^4 \cdot 0,1$  и ... попадет впросак.



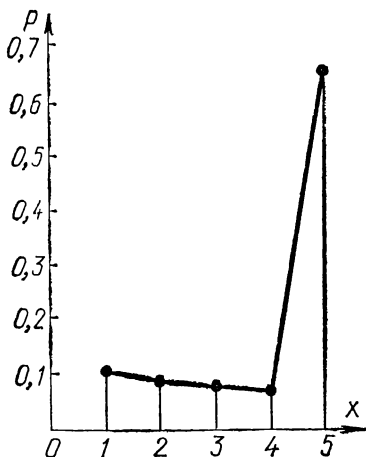


Рис. 36

Если же этот возможный конфуз вас миновал, радуйтесь своим успехам в понимании своеобразия вероятностных методов.

Чтобы получить правильное значение вероятности последнего из возможных значений случайной величины  $X$ , следует рассматривать событие  $X = 5$  как объединение (сумму) двух несовместных событий:

$A$  — надежны четыре прибора и ненадежен пятый,  $P(A) = 0,9^4 \cdot 0,1$ ,

$B$  — надежны все пять приборов,  $P(B) = 0,9^5$ .

Следовательно,  $P(X=5) =$

$$= P(A) + P(B) = 0,9^4 \cdot (0,1 + 0,9) = 0,6561.$$

Сведем результаты в таблицу распределения случайной величины  $X$ :

| X | 1   | 2    | 3     | 4      | 5      |
|---|-----|------|-------|--------|--------|
| p | 0,1 | 0,09 | 0,081 | 0,0729 | 0,6561 |

Для контроля правильности своих вычислений убедитесь по таблице в том, что  $\sum_{i=1}^5 p_i = 1$ .

Отметим на оси абсцисс все 5 значений случайной величины  $X$ , а на оси ординат — вероятности этих значений (рис. 36). Построим точки  $(x_i, p_i)$  и для усиления наглядности соединим их последовательно отрезками. Получившуюся ломаную называют **многоугольником распределения** случайной величины. У такого «многоугольника» сумма ординат вершин всегда равна 1.

**Выполнение «наряда» одним рабочим.** Для выполнения задания рабочий с одинаковой вероятностью может быть направлен на один из четырех станков, показанных на схеме (рис. 37). Также одинаково вероятно он может всю



Рис. 37

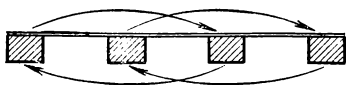


Рис. 38

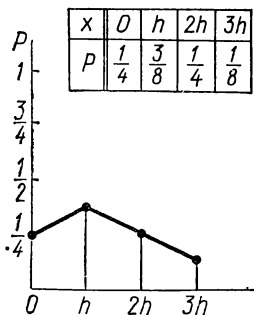


Рис. 39

работу выполнить на одном станке или для ее окончания перейти на любой другой станок из этих четырех. Расстояния между каждыми двумя соседними станками одинаковы и равны  $h$ . Какое распределение имеет длина совершаемого им каждый раз перехода?

**Решение.** Возможны 4 значения случайной длины перехода  $X$ :  $0$ ,  $h$ ,  $2h$  и  $3h$ . Вероятность выбора станка для начала работы, как и для ее завершения на любом станке, равна  $\frac{1}{4}$ . Следовательно,  $P(X = 0) = \frac{1}{4}$ .

Вероятность пересечения событий «выбор станка» и «переход на другой станок» равна  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ .

У станков № 1 и № 4 есть только по одному соседу, у станков № 2 и № 3 — по два соседа. Это дает 6 событий с вероятностью  $\frac{1}{16}$  для каждого. Их объединение составляет

событие « $X = h$ ». Следовательно,  $P(X = h) = \frac{1}{16} \cdot 6 = \frac{3}{8}$ .

Длина перехода в  $2h$  состоит из объединения четырех событий с вероятностью  $\frac{1}{16}$  для каждого (рис. 38). Следова-

тельно,  $P(X = 2h) = \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{1}{4}$ . Представьте себе схему переходов длиной в  $3h$  и станет ясным, что

$$P(X = 3h) = \frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8}.$$

По полученным результатам строим многоугольник распределения (рис. 39).

**Биномиальное распределение.** Пусть случайная величина  $X$  — число появлений события  $A$  в  $n$  независимых испытаниях, причем для каждого испытания

$$P(A) = p, P(\bar{A}) = q = 1 - p.$$

Возможные значения  $X$ :  $x_0 = 0, x_1 = 1, \dots, x_n = n$ . Вероятности этих значений дает формула Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

а именно:

$$P(X=0) = P_n(0) = q^n, P(X=1) = P_n(1) = C_n^1 p q^{n-1}, \dots, \\ \dots, P(X=n) = P_n(n) = p^n.$$

Сведем результаты в таблицу:

|           |       |                   |     |                     |     |       |
|-----------|-------|-------------------|-----|---------------------|-----|-------|
| $X = x_i$ | 0     | 1                 | ... | $m$                 | ... | $n$   |
| $P_n(i)$  | $q^n$ | $C_n^1 p q^{n-1}$ | ... | $C_n^m p^m q^{n-m}$ | ... | $p^n$ |

Естественно, что распределение такой дискретной величины, вероятность каждого значения которой равна соответствующему члену разложения биннома  $(q + p)^n$ , называется *биномиальным распределением*.

К этой модели с той или иной степенью приближаются многие практические задачи.

**Независимость двух случайных величин.** Пусть  $x$  есть некоторое значение случайной величины  $X$ , а  $y$  — некоторое значение случайной величины  $Y$ . Подразумевается, что  $X$  и  $Y$  определены на одном и том же ПЭС. События  $X = x$  и  $Y = y$  можно рассматривать порознь и совместно как одно событие  $(X = x, Y = y)$ , состоящее в том, что случайные величины  $X$  и  $Y$  приняли указанные значения **с о в м е с т н о**. Положим далее, что известны вероятности событий  $(X = x)$ ,  $(Y = y)$  и  $(X = x, Y = y)$ .

Если сравнить вероятность совместного события  $(X = x, Y = y)$  с произведением вероятностей отдельно взятых событий  $(X = x)$  и  $(Y = y)$ , то вообще говоря, результат сравнения не обязан быть равенством. Если же все-таки

$$\blacksquare P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad (1)$$

для л ю б ы х возможных  $x$  и  $y$ , то случайные величины  $X$  и  $Y$  называются *независимыми*.

Одним из источников возникновения независимых случайных величин  $X$  и  $Y$  является физическая независимость испытаний, порождающих эти величины. Независимость испытаний влияет на формирование распределения вероятностей  $X$ ,  $Y$ , а также и на формирование их совместного распределения. В таких условиях равенство (1) является количественным выражением свойства независимости, присущего случайным величинам  $X$  и  $Y$ .

**Пример 1.** Пусть  $X$  — число очков, выпавшее при подбрасывании игрального кубика,  $Y$  — число очков, выпавшее при подбрасывании второго такого же кубика. Как обычно, полагаем, что для любых  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$   $P(X = i) = \frac{1}{6}$  и  $P(Y = j) = \frac{1}{6}$ . При подбрасывании двух кубиков каждое значение  $X = i$  встретится в комбинации с каждым значением  $Y = j$  и всего образуется 36 событий вида  $(X = i, Y = j)$ . Естественно полагать их равновероятными; тогда  $P(X = i, Y = j) = \frac{1}{36}$ . Получается, что при любых  $i$  и  $j$

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

как и должно быть для независимых событий.

**Пример 2.** Любому дню календаря можно сопоставить пару состояний: «погода» (дождь или ясно) и «предсказанная погода» (предсказанный дождь или непредсказанный дождь).

Рассмотрим пару случайных величин  $X, Y$ , где  $X$  — «дождь»,  $Y$  — «предсказание дождя», с двумя значениями для каждой: *да*, *нет*.

Положим, что теоретически обоснована следующая таблица распределения вероятностей четырех возможных пар значений (*да*, *нет*):

|       |            | Предсказание дождя |            |
|-------|------------|--------------------|------------|
|       |            | <i>да</i>          | <i>нет</i> |
| дождь | <i>да</i>  | $p = 0,3$          | $q = 0,1$  |
|       | <i>нет</i> | $r = 0,1$          | $s = 0,5$  |

Так,  $p$  — вероятность пары  $(да, да)$  является вероятностью того, что будет дождь тогда, когда его предсказали синоптики.

Заданная таблица дает возможность составить распределения отдельно взятых случайных величин  $X$  — «дождь» и  $Y$  — «предсказание дождя»:

$P(X = да) = p + q = 0,4$  — дождь предсказан и он состоялся ( $p = 0,3$ ) или дождь не предсказан, но он состоялся ( $q = 0,1$ ).

$P(X = нет) = r + s = 0,6$ .

Аналогично  $P(Y = да) = p + r = 0,4$ ,  $P(Y = нет) = q + s = 0,6$ .

Распределения  $X$  и  $Y$  определились полностью:

| $X$ | да  | нет |
|-----|-----|-----|
| $P$ | 0,4 | 0,6 |

| $Y$ | да  | нет |
|-----|-----|-----|
| $P$ | 0,4 | 0,6 |

Теперь выясним, зависимы или независимы  $X$  и  $Y$ .

Дано, что  $P(X = да, Y = да) = 0,3$ . Это число не равно произведению  $P(X = да) \cdot P(Y = да) = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16$ . Достаточно одного примера нарушения равенства (1), чтобы считать установленным, что  $X$  и  $Y$  — зависимые величины.

Но в интересах практики как раз и надо, чтобы между предсказанием дождя и его появлением существовала как можно более сильная зависимость. Математики даже придумали способ измерения «силы» или «степени» зависимости между случайными величинами. Подробнее этой темы касаться не будем.

Вероятно, самую «сильную» зависимость между состоянием дождя и предсказанием дождя обеспечило бы «идеальное» распределение вида:

Предсказание дождя

|       |     | да  | нет     |
|-------|-----|-----|---------|
| дождь | да  | $p$ | 0       |
|       | нет | 0   | $1 - p$ |

**Два замечания.** 1. В примере 1 случайные величины  $X$  и  $Y$  имели одинаковое распределение и были независимыми; в примере 2 случайные величины также имели одинаковое распределение, но оказались зависимыми.

2. Как показал пример 2, достаточно знать совместное распределение двух случайных величин, чтобы определить распределение каждой из них в отдельности (но не наоборот, если заранее неизвестно, что случайные величины независимы).

### ОТЫСКАНИЕ «ЦЕНТРА» В ХАОСЕ РАЗБРОСА ИЛИ «СРЕДНЕЕ», НАЗЫВАЮЩЕЕ СЕБЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИМ ОЖИДАНИЕМ»

Произведено 100 наблюдений уровней «помех», возникающих в приборах  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Оценку «помех» определили по трехбалльной системе:

| Уровень «помех»                            |            | 1  | 2 | 3 |
|--|------------|----|---|---|
| Число наблюдений «помех»<br>данного уровня | Прибор $A$ | 12 | 6 | 4 |
|  | Прибор $B$ | 8  | 5 | 9 |
|  | Прибор $C$ | 16 | 4 | 7 |

В остальных случаях помехи не наблюдались (нулевой уровень). Какой прибор следует признать лучшим?

Разумеется, возможны разные критерии оценки качества прибора. В данном случае будем считать лучшим тот прибор, у которого меньше средняя оценка уровня «помех».

Средняя оценка для прибора  $A$ :

$$\bar{x}_A = \frac{12 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 78 \cdot 0}{12 + 6 + 4 + 78} = 0,36.$$

Средняя оценка для прибора  $B$ :

$$\bar{x}_B = \frac{8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 78 \cdot 0}{8 + 5 + 9 + 78} = 0,45.$$

Средняя оценка для прибора С:

$$x_C = \frac{16 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 73 \cdot 0}{16 + 4 + 7 + 73} = 0,45.$$

У приборов В и С средние уровни «помех» одинаковы.

Целесообразно ли признать эти приборы принадлежащими одному классу изделий или следует оценить «помехи» еще какой-либо дополнительной количественной характеристикой? Какой? Что подскажет ваша инженерная интуиция? Позже мы вернемся к этому вопросу.

Для полученных значений  $\bar{x}_A$ ,  $\bar{x}_B$ ,  $\bar{x}_C$  применяется еще такое название: «взвешенные средние арифметические». При этом число ( $m_i$ ) повторений значения  $x_i$  называют *весом* этого значения  $x_i$ .

Например, из таблицы следует, что 12 есть «вес» значения  $x_1 = 1$  случайной величины «уровень помех» для прибора А.

В общем виде взвешенная средняя арифметическая  $n$  значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  случайной величины  $X$ , имеющих «веса»  $m_1, m_2, \dots, m_n$  определяется равенством:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{k},$$

где  $k = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  — сумма всех «весов».

Преобразуем эту формулу к виду:

$$\bar{x} = x_1 \frac{m_1}{k} + x_2 \frac{m_2}{k} + \dots + x_n \frac{m_n}{k}.$$

Отношения  $\frac{m_1}{k}, \frac{m_2}{k}, \dots, \frac{m_n}{k}$  суть относительные частоты (статистические вероятности) соответствующих значений случайной величины  $X$ . Обозначим их:

$$\frac{m_1}{k} = p_1^*, \frac{m_2}{k} = p_2^*, \dots, \frac{m_n}{k} = p_n^*, \text{ тогда}$$

$$\bar{x} = x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \dots + x_n p_n^*.$$

Предположим теперь, что распределение дискретной случайной величины задано не «весами» или относительными частотами ее значений, а **вероятностями**:

|     |       |       |     |       |     |       |
|-----|-------|-------|-----|-------|-----|-------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_l$ | ... | $x_n$ |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_l$ | ... | $p_n$ |

Понимая вероятность  $p_i$  как «идеализированную относительную частоту» — число, около которого группируются относительные частоты  $p_i^*$ , вычисленные по результатам достаточно большой серии  $k$  наблюдений, очевидно, будет естественным ввести понятие *ожидаемого среднего* для совокупности  $n$  заданных значений случайной величины  $X$  и определить его (ожидаемое среднее) равенством

$$|\bar{x} = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n.$$

Вычисленное по этой формуле ожидаемое среднее значение дискретной случайной величины  $X$  имеет и другое имя: *математическое ожидание*, и обозначается символом  $M\{X\}$ , или  $m_X$ ; сохраняется также и прежде введенное обозначение:  $\bar{x}$ .

*Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений этой величины на их вероятности.*

Если произвести несколько серий испытаний (опытов), то взвешенные средние арифметические, вычисленные для каждой серии испытаний, будут колебаться около постоянного числа ( $m_X$ ), которое и есть математическое ожидание рассматриваемой случайной величины.

Эта связь между взвешенным средним арифметическим и математическим ожиданием является одной из форм проявления объективного закона больших чисел.

Зная математическое ожидание случайной величины, можно как бы предвидеть результаты испытаний, проводимых в устойчивых условиях.

Если значения дискретной случайной величины понимать как количественное выражение успеха, выигрыша (полагая проигрыш выигрышем, имеющим значение 0), то математическое ожидание представляет так называемую «справедливую цену» одного выигрыша. Например, в случае лотереи — справедливую цену лотерейного билета. Она «справедлива» в том смысле, что если за эту цену продается право участия в выигрыше (билет), то сумма вырученных денег равна сумме выигрышей.

В «Спортлото» не все деньги, вырученные от продажи билетов, возвращаются населению в виде выигрышей, определенная часть, как известно, идет на развитие спорта, следовательно, «справедливая цена билета» меньше его фактической стоимости,  $m_X < 30$  коп.



Покупая билет «Спортлото» за 30 коп., мы имеем, по словам одного статистика, «хороший шанс не выиграть ничего, маленький шанс выиграть немного и очень малый шанс большого выигрыша», но при этом спорт выигрывает всегда.

Рассмотрим примеры вычисления математического ожидания дискретной случайной величины.

## ПЯТЬ ЗАДАЧ

**1. Справедливая цена лотерейного билета.** Предположим, что выпущено 100 000 билетов денежной лотереи. Разыгрываются 2 выигрыша по 5000 рублей, 8 по 1000 руб., 170 по 100 руб., 350 по 50 руб. и 750 выигрышей по 10 руб. Требуется составить таблицу распределения стоимости выигрыша для владельца одного лотерейного билета и вычислить «справедливую цену» одного билета.

**Решение.**

|       |         |         |        |        |        |        |
|-------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| $x_i$ | 5000    | 1000    | 100    | 50     | 10     | 0      |
| $p_i$ | 0,00002 | 0,00008 | 0,0017 | 0,0035 | 0,0075 | 0,9872 |

$$m_X = 0,1 + 0,08 + 0,17 + 0,175 + 0,075 = 0,6, \\ 0,6 \text{ руб.} = 60 \text{ коп.}$$

**2. Простейшая из случайностей.** Положим, что предполагается всего одно испытание. При этом некоторое событие  $A$  либо появляется с вероятностью  $p$ , либо не появляется с вероятностью  $1 - p$ .

Число появлений события  $A$  в одном испытании есть случайная величина  $X$ , равная 1, когда  $A$  наступило, и равная 0, когда  $A$  не наступило. Требуется найти  $M\{X\}$ .

**Решение.** Полагая  $P(X = 1) = p$  и  $P(X = 0) = 1 - p = q$ , находим:

$$M\{X\} = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

Будем знать, что математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

**3. Сходство вероятностных моделей.** Вычислить математическое ожидание числа приборов, давших отказ за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа  $p$ .

**Решение.** Подметьте, что вероятностная модель решения этой и предыдущей задач одна и та же. Следовательно, и ответ возникает сразу:  $M\{X\} = p$ .

**4. «Сезам, отворись!»** В сказке Шехерезады, если этот пароль заранее неизвестен, к сокровищам в пещеру не проникнешь. Угадать такой пароль — событие практически невозможное. В современной сказке-задаче вместо пароля действует «механизм» с селедками в кувшинах, помещенных в бочку (см. «Укрощение случая» на с. 9).

В изменившихся условиях Али-Баба, несомненно, в пещеру попадет: при обдуманной системе действий — максимум за пять попыток, а в расчете на случайность — за три попытки «в среднем».

К такому заключению приводит «математическая экспертиза» ситуаций, создаваемых условием задачи. Но не интереснее ли вам проверить или опровергнуть наши утверждения, следуя собственной системе «следствия по делу о возможных попытках войти в пещеру», и лишь после этого принять участие в дальнейшем совместном обсуждении задачи.

### Экспертиза и решение.

Выясним прежде всего, какие возможны виды начального расположения селедок в кувшинах. Если такой же пункт был отправным и в схеме ваших рассуждений, то, несомненно, мы не разойдемся в установлении того, что вначале имеется только 4 вида расположения селедок и они одинаково возможны (на рисунке 40 расположение I).

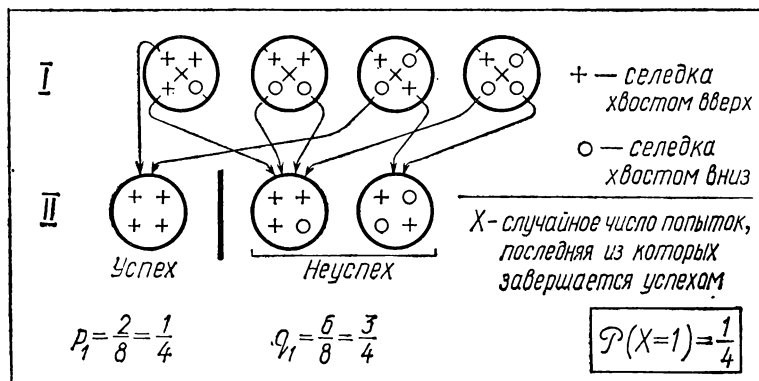




Рис. 40

Из многих возможных «стратегий» (систем действий) выберем такую: 1) опустим руки в любую пару диаметрально

расположенных отверстий; код такой операции  ;

2) опустим руки в любую пару соседних отверстий, код такой операции  ; будем далее эти операции чередовать.

вать.

В первой попытке устанавливаем сеledки хвостами вверх. Из восьми равновозможных случаев два приводят к успеху (все сеledки оказываются хвостами вверх) с вероятностью  $p_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ .

Если успех не последовал, то перед второй попыткой имеем лишь два вида различных позиций (на рисунках 40 и 41 расположение II) с суммарной вероятностью, равной  $q_1 = \frac{3}{4}$ .

Пусть  $X$  — случайное число попыток, последняя из которых завершается успехом. Тогда  $P(X=1) = \frac{1}{4}$ .

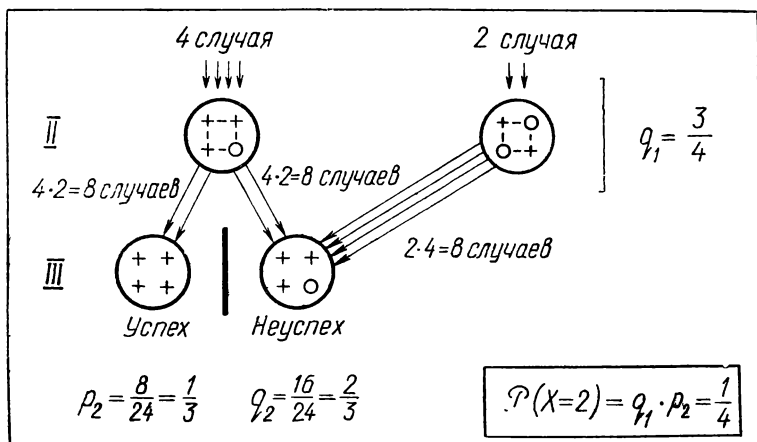


Рис. 41

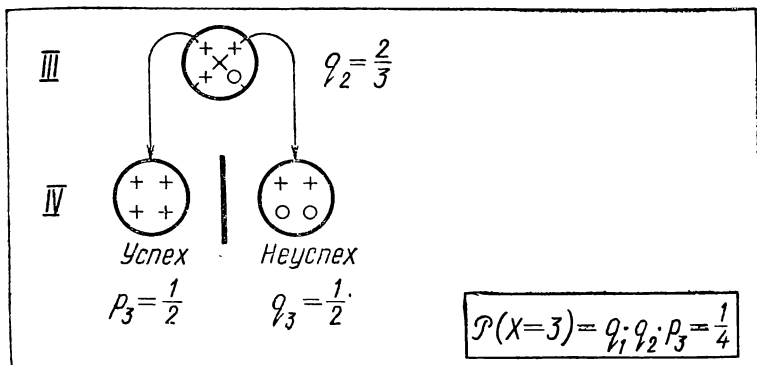



Рис. 42

Во второй попытке, как и в первой, добиваемся расположения испытуемой пары селедок хвостами вверх. При этом либо имеем успех с вероятностью  $p_2 = \frac{1}{3}$  (8 случаев из 24), либо неуспех, приводящий к единственному виду

расположения селедок  (на рисунках 41 и 42 распо-

ложение III) с вероятностью  $q_2 = \frac{2}{3}$ .

Вычисляем  $P(X = 2)$ . Случайная величина  $X$  принимает значение 2, если имел место неуспех в первой попытке ( $q_1 = \frac{3}{4}$ ) и успех во второй ( $p_2 = \frac{1}{3}$ ). Следовательно,  $P(X = 2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ .

Третья попытка, кодовая операция которой



имеет два варианта. При осуществлении одного из них в руках оказывается хвост одной селедки и голова другой. Придадим селедкам положение хвостами вверх и получим успех. Но при осуществлении второго варианта, если не изменим принципу иметь селедки хвостами вверх, то вернемся к тому же виду расположения селедок, которое мы имели перед этой попыткой. Поэтому, ощутив в

руках обе селетки хвостами вверх, одну из них (любую) переложим хвостом в н и з. Это даст неуспех, но приведет перед четвертой попыткой опять к единственному ви-

ду расположения селенок  $\begin{pmatrix} + & + \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$ . Очевидно, что

$$p_3 = q_3 = \frac{1}{2} \text{ и } P(X=3) = P(H_1 \text{ и } H_2 \text{ и } Y_3) = \\ = q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; P(X=3) = \frac{1}{4}$$

(Н — неуспех, У — успех, индекс — номер попытки).

В четвертой попытке (рис. 42, 43), кодовая операция

которой  $\begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}$ , в любом из четырех вариантов меняем

положение той и другой селетки на противоположное, тогда в д в у х случаях имеем успех (одинаковую ориентацию хвостов) и в д в у х — неуспех единственного вида

$\begin{pmatrix} + & \circ \\ \circ & + \end{pmatrix}$ . Очевидно, что

$$p_4 = q_4 = \frac{1}{2} \text{ и } P(X=4) = P(H_1 \text{ и } H_2 \text{ и } H_3 \text{ и } Y_4) = \\ = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}; P(X=4) = \frac{1}{8}.$$

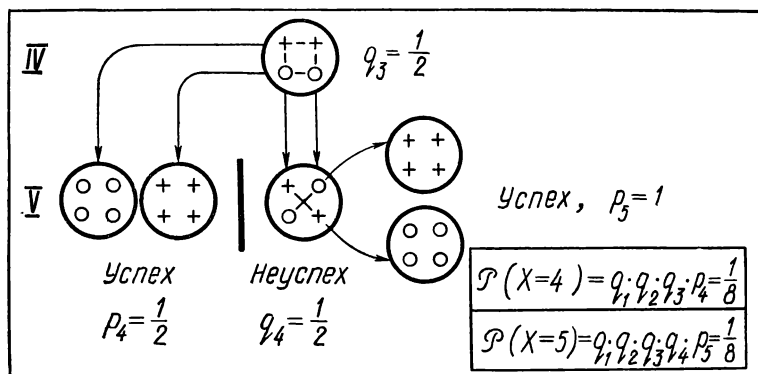


Рис. 43

В пятой попытке (рис. 43), кодовая операция которой



, в любом из двух вариантов меняем положение

селедок на противоположное и успех гарантирован. «Механизм» срабатывает неизбежно и ожидаемое событие — «Сезам, отворись!» — становится достоверным.

Программист ЭЦВМ представил бы эту систему действий в форме короткой схемы (блок-схемы алгоритма, см. с. 142).

Условный знак  $\boxed{++}$  на схеме означает: *расположить обе селедки хвостами вверх.*

Вычисленные вероятности всех пяти возможных значений случайной величины  $X$  (числа попыток добиться успеха) сведем в таблицу

| $X$ | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $p$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

Проверяем:  $\sum_{i=1}^5 p_i = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$ . Закон

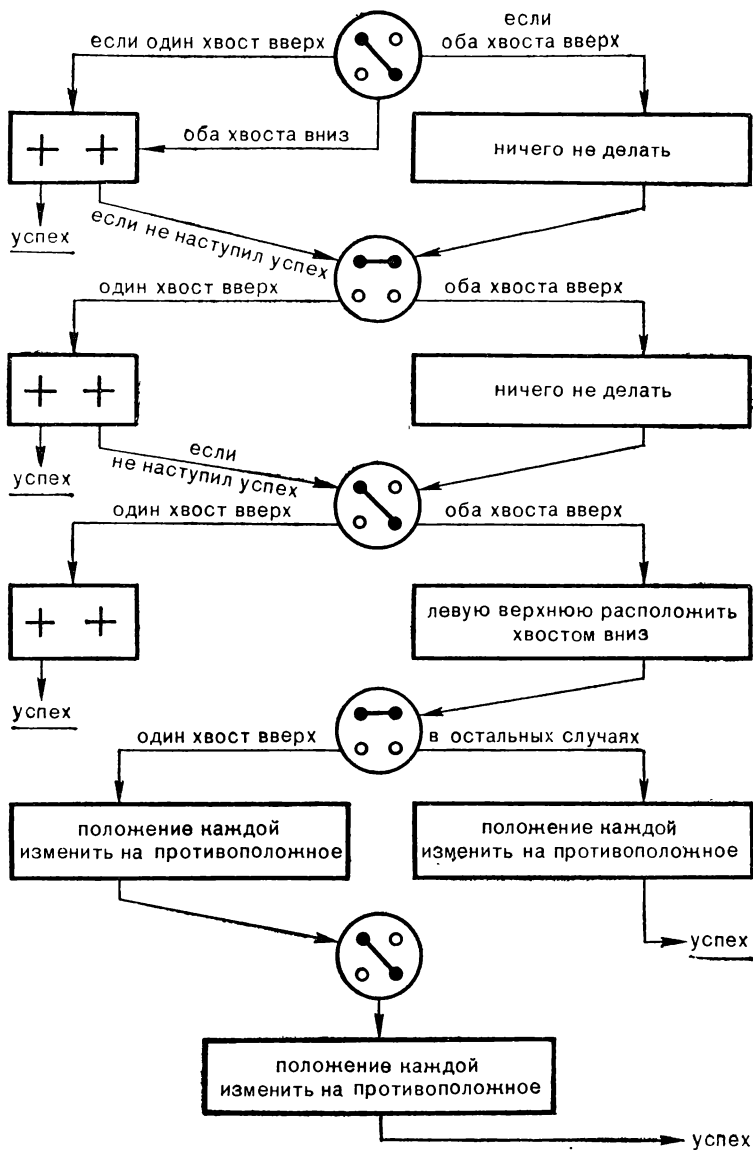
распределения случайной величины  $X$  найден. Нетрудно вычислить и среднее число возможных попыток (математическое ожидание случайной величины  $X$ ):

$$M\{X\} = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{8} = 2,625 \approx 3.$$

На ринге случайности противодействие наступлению успеха длится в среднем до трех попыток.

**5. Математическое ожидание при биномиальном распределении.** Положим, что одновременно находятся в игре  $n$  шариков настольного тенниса. Вероятность появления трещины на шарике во время игры одна и та же для всех шариков и равна  $p$ . Найти среднее ожидаемое число поврежденных шариков за время игры.

# БЛОК СХЕМА АЛГОРИТМА



**Р е ш е н и е.** Из  $n$  «играющих» шариков могут потрескаться  $0, 1, 2, \dots, n$  шариков. Пусть эти числа являются значениями случайной величины  $Z$ . Вдумавшись в условие задачи, легко понять, что вероятность каждого из значений  $Z = i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ , определяется знакомой нам формулой, характеризующей биномиальное распределение случайной величины  $Z$ :

$$P(Z = i) = C_n^i p^i (1 - p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Искомое математическое ожидание случайной величины  $Z$  — число поврежденных шариков за время игры; оно равно

$$M\{Z\} = \sum_{i=0}^n i \cdot C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i}, \quad q = 1 - p.$$

Получившаяся форма ответа воспринимается, пожалуй, без удовольствия. Остается ощущение незавершенности результата (знак  $\sum$  только скрадывает, но не устраняет громоздкости формы ответа).

Возможны два направления дальнейших размышлений: либо искать и даже изобретать способ преобразования полученного выражения к более простому виду, либо обдумать другое направление решения задачи. Любознательных приглашаем избрать второе «либо».

Для этого привлечем идею, очень популярную во многих направлениях математических исследований: искать свойство объекта, предварительно разложив объект на сумму (или произведение) таких частей, соответствующие свойства которых известны или обнаруживаются проще. Вспомните: для вычисления площади многоугольника разбиваем его на треугольники; для вычисления вероятности события прибегаем, когда возможно и целесообразно, к «алгебре» составляющих событий.

Для решения задачи о шариках и многих других задач оказывается применимой аналогичная «алгебра» математических ожиданий, в частности, применимы теоремы о математическом ожидании суммы и произведения случайных величин, математические ожидания которых известны.



## СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

**Т е о р е м а.** *Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.*

Ограничиваясь двумя дискретными случайными величинами  $X$  и  $Y$ , докажем, что

$$\mathbb{M} \{X + Y\} = \mathbb{M} \{X\} + \mathbb{M} \{Y\}.$$

Будем считать, что числовые функции  $X = X(E_i)$ ,  $Y = Y(E_i)$  и их сумма  $Z(E_i) = X(E_i) + Y(E_i)$  определены на одном общем пространстве элементарных событий

$$E_i \in \Omega, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть  $P(E_i) = p_i$ . Из определения математического ожидания случайной величины следует, что

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \{Z\} &= \sum_{i=1}^n Z(E_i) p_i = \sum_{i=1}^n [X(E_i) + Y(E_i)] p_i = \sum_{i=1}^n X(E_i) p_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n Y(E_i) p_i = \mathbb{M} \{X\} + \mathbb{M} \{Y\}. \end{aligned}$$

Этот результат естественно обобщается на любое число слагаемых. Например,

$$\mathbb{M} \{X_1 + X_2 + X_3\} = \mathbb{M} \{X_1 + X_2\} + \mathbb{M} \{X_3\} = \mathbb{M} \{X_1\} + \mathbb{M} \{X_2\} + \mathbb{M} \{X_3\}.$$

Применим наметившийся прием рассуждений к задаче о теннисных шариках. Теоретической моделью этой задачи является схема Бернулли для  $n$  испытаний ( $n$  шариков), в каждом из которых событие  $A$  — поврежденный шарик (это «Успех») — наступает с вероятностью  $p$ ,

$$P(A) = p, \quad P(\bar{A}) = q = 1 - p.$$

Пусть  $Z$  — число успехов в  $n$  испытаниях,  
 $X_1$  — число успехов в первом испытании,  
 $X_2$  — число успехов во втором испытании,  
 $\dots$   
 $X_n$  — число успехов в  $n$ -м испытании.

Следовательно,

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Каждый отдельно испытываемый шарик либо остается неповрежденным, либо дает трещину. Это значит: в каждом отдельном испытании число успехов либо 0, либо 1. Следовательно, все случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , составляющие в сумме случайную величину  $Z$ , как раз таковы, математические ожидания которых мы научились вычислять (см. задачу 2 на стр. 136).

Так как вероятность успеха в каждом испытании по условию равна  $p$ , то в соответствии с результатом задачи 2 имеем:

$$M\{X_1\} = M\{X_2\} = \dots = M\{X_n\} = p.$$

Пользуясь теоремой о математическом ожидании суммы, теперь легко вычислим искомое среднее ожидаемое число поврежденных теннисных шариков:

$$M\{Z\} = M\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\} = \sum_{i=1}^n M\{X_i\} = M\{X_1\} + \dots + M\{X_n\} = n \cdot p.$$

В завершение решения задачи сделаем два заключения.

**Первое заключение.** Математическое ожидание  $M\{Z\}$  случайной величины  $Z$ , где  $Z$  — число появлений успеха в  $n$  независимых испытаниях, равно произведению числа испытаний на вероятность успеха в каждом испытании

$$\parallel M\{Z\} = n \cdot p.$$

**Второе заключение.** Решая задачу двумя способами, мы получили

$$M\{Z\} = \sum_{i=1}^n i \cdot C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i} \text{ и } M\{Z\} = n \cdot p.$$

Тем самым доказано любопытное и полезное для вычисления вероятностей тождество

$$\sum_{i=1}^n i \cdot C_n^i p^i q^{n-i} = n \cdot p$$

при условии, что  $q = 1 - p$ .

Доказать это тождество иначе, путем преобразования его левой части, — задача для желающих решить ее самостоятельно.

Кстати, в главе «Дополнения» доказана еще и теорема о математическом ожидании произведения: *математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей.*

Короче, если  $X$  и  $Y$  — независимые случайные величины (см. с. 130), то

$$\| M \{X \cdot Y\} = M \{X\} \cdot M \{Y\}.$$

Задачи для самостоятельного решения. 1. Брошены две игральные кости один раз. Вычислить (пользуясь свойствами м. о.):

- а) математическое ожидание суммы числа очков;
  - б) математическое ожидание произведения числа очков.
- О т в е т. а)  $M \{X + Y\} = 7$ ; б)  $M \{X \cdot Y\} = 12,25$ .

2. Основываясь на определении математического ожидания, доказать справедливость утверждений: если  $c$  — величина постоянная (не случайная), то

$$\| \begin{aligned} M \{c\} &= c; \\ M \{c \cdot X\} &= c \cdot M \{X\}. \end{aligned}$$

## УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

**Желаем удачи.** В стихии случайностей мы все же допускаем возможность успеха с первой попытки, а если она завершилась неуспехом, то со второй попытки; обе попытки привели к неуспеху, тогда в третьей предполагаем удачу и так далее, до первого успеха на какой-либо попытке с заранее назначенным или неназначенным порядковым номером.

Как распределяются вероятности между попытками и каково математическое ожидание случайного числа попыток  $\{X\}$ , последняя из которых завершается успехом?

При построении теоретической модели распределения числа попыток добиться успеха интересно предусмотреть возможность неограниченного числа неудач, предшествующих успеху. Таблицу распределения и в этих условиях составить нетрудно. Пусть

$X = 1$  — успех ( $Y$ ) с первого раза и  $P(X = 1) = p$ ,  
 $0 < p < 1$ ,

$X = 2$  — неуспех в первый раз и затем успех:

$$H \cap Y \Rightarrow P(X = 2) = qp, \text{ где } q = 1 - p,$$

$X = 3$  — неуспех в первый раз и во второй раз и затем успех:  $H \cap H \cap Y \Rightarrow P(X = 3) = q^2 p$  и т. д.

Получаем таблицу:

|     |     |      |         |     |             |     |
|-----|-----|------|---------|-----|-------------|-----|
| $X$ | 1   | 2    | 3       | ... | $n$         | ... |
| $P$ | $p$ | $qp$ | $q^2 p$ | ... | $q^{n-1} p$ | ... |

Проверим, дает ли составленная таблица закон распределения вероятностей случайной величины  $X$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \cdot p = p(1 + q^2 + q^3 + \dots).$$

Формула для вычисления суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии ( $0 < q < 1$ ) известна:  $S = \frac{a_1}{1-q}$ .

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Когда при переходе от любого значения случайной величины к следующему соответствующая вероятность уменьшается в устойчивом отношении, такое распределение вероятностей называется *геометрическим* (оно образует геометрическую прогрессию). Его называют еще *распределением Фарри*.

Среднее значение (математическое ожидание) случайной величины  $X$ , подчиненной геометрическому распределению, определяется выражением:

$$\begin{aligned} \bar{x} = M\{X\} &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n x_n = p + 2qp + 3q^2 p + \dots = \\ &= p(1 + 2q + 3q^2 + \dots). \end{aligned} \quad (2)$$

Бесконечный ряд, размещившийся в скобках, не является геометрической прогрессией и с вычислением его суммы хлопот не мало.

Может быть вы знаете все же, что сумма этого ряда существует и на удивление проста:

$$1 + 2q + 3q^2 + \dots = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad (3)$$

А если не знаете? Тогда — выведем.

Есть много учебников разного назначения, в которых изложен с большей или меньшей строгостью один и тот же вывод требуемой формулы для  $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = 1 + 2q + 3q^2 + \dots$ .

Он доступен каждому, кто умеет находить «производную» функции  $x^n$ . Но хотелось бы «заманить» вас на непроторенную тропу, причем совсем не по глупому принципу «умный гору обойдет». Если «дифференцирование функций» — гора, то это и есть одна из тех вершин, с которых открывается величественная панорама приложений математики, и обходить ее не следует. Но математическая увлеченность все-таки иной раз побуждает к вылазкам на тропинки, лежащие в стороне от магистральной трассы. Интересные находки попадают и на боковых дорожках.

Так вот, пользуясь утверждением, устанавливающим, что бесконечный ряд  $p(1 + 2q + 3q^2 + \dots)$  «сходится» к числу  $\bar{x}$  (имеет сумму, равную  $\bar{x}$ ), мы попытаемся уравнение с бесконечным числом слагаемых  $\bar{x} = p + 2qp + 3q^2p + 4q^3p + \dots$  превратить в уравнение с конечным числом членов, из которого и найдем неизвестное  $\bar{x}$ . Проследите внимательно за «химией превращения»:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= p + q(2p + 3qp + 4q^2p + \dots), \\ \bar{x} &= p + q[(p + 2qp + 3q^2p + \dots) + \\ &\quad + (p + qp + q^2p + \dots)]. \end{aligned}$$

Содержимое первой круглой скобки по условию равно  $\bar{x}$ , а второй, как вычислено выше, равно 1, следовательно,

$$\bar{x} = p + q(\bar{x} + 1).$$

Решив уравнение относительно  $\bar{x}$ , получим:  $\bar{x} = \frac{1}{p}$ .

Пользуясь этим результатом, вы легко завершите самостоятельно переход от равенства (2) к выводу формулы (3).

**Пример-шутка.** Арбузы продают без выреза. Я хочу уйти с базара непременно с хорошим арбузом. Поэтому у купленного арбуза тут же делаю вырезку. Если

арбуз плохой, покупаю второй и повторяю процедуру до первого успеха. По оценке моего друга, занимающегося статистикой, шансы на случайную выборку хорошего и плохого арбуза в сегодняшнем завозе относятся как 9 : 1. Значит, если «повезет», то меня сегодня не ожидает большой расход на приобретение хорошего арбуза.

Арбузов на базаре так много, что их запас я позволяю себе считать неисчерпаемым и тогда получается, что «математическое ожидание» числа испытанных мною арбузов  $\bar{x} = \frac{1}{0,9}$  (по формуле  $\bar{x} = \frac{1}{p}$ ) и, значит,

$$1 < \bar{x} < 2.$$

Для самостоятельного решения. В более общем случае, когда случайная величина  $X$  подчинена распределению вида

$$P \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} a & a+d & a+2d & \dots & a+kd & \dots \\ \hline p & pq & pq^2 & \dots & pq^k & \dots \end{array} \parallel, \quad p+q=1,$$

ее математическое ожидание ( $\bar{x}$ ) удовлетворяет уравнению

$$\bar{x} = pa + q(\bar{x} + d). \quad (4)$$

Вывод достаточно провести для частных значений  $a = 3$  и  $d = 2$ , с которыми встретимся в следующей задаче.

**Не попадись в ловушку, букашка!** Букашка безостановочно блуждает по ребрам куба со скоростью одно ребро в одну минуту (рис. 44). Путешествие она начинает из вершины  $A$ . В вершине  $C_1$  находится ловушка, попадая в которую, букашка погибает. По ребру она ползет, не меняя направления, а в любой вершине куба (кроме  $C_1$ ) перед букашкой, как перед «добрым молодцем» из сказок, — развилка из трех дорог. Предупреждений о том, что ждет букашку, «если налево или прямо или направо пойдет», нет, поэтому она для дальнейшего движения выбирает любое из трех ребер с одинаковой вероятностью ( $p = \frac{1}{3}$ ).

Букашка может бесконечно долго ползать по ребрам, не по-

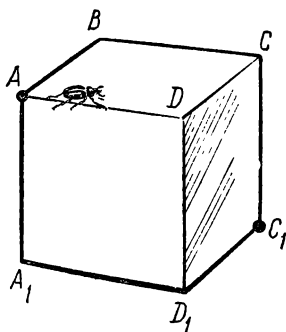


Рис. 44

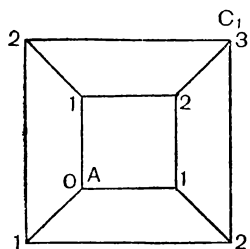


Рис. 45

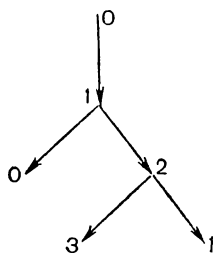


Рис. 46

падая в ловушку, а самое короткое время ее жизни — 3 минуты. Какова средняя продолжительность жизни этой букашки?

Попытайтесь предварительно угадать ответ. Какое среднее число минут кажется вам наиболее правдоподобным?

**Решение.** Продолжительность жизни букашки — случайная переменная величина  $X$ , принимающая значения  $3, 5, 7, \dots, 2n + 1, \dots$  (минут).

Составление таблицы распределения вероятностей для дискретной случайной величины, имеющей неограниченную последовательность значений, — увлекательная комбинаторная задача.

Построим плоский «граф», имитирующий восемь троек ребер, сходящихся в восьми узлах — вершинах куба (рис. 45). Все 8 узлов разобьем на 4 класса в соответствии с минимальным количеством звеньев,

соединяющих узел с начальной вершиной  $A$ . На рисунке узлы, принадлежащие одному классу, отмечены одинаковыми цифрами.

Мы выиграем в наглядности, преобразовав «граф» в «дерево вероятностей» возможных переходов от одного узла к другому (рис. 46).

Как показывает «дерево», маршрут в два звена ( $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ), т. е. 2 минуты жизни букашки, возвращают ее в положение «0» с вероятностью  $1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ .

Второй вид маршрута букашки ( $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ), возвращающий ее в узел «1», длится 3 минуты и осуществляется с вероятностью  $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ .

Третий маршрут ( $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ) длится 3 минуты с вероятностью  $1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ . Этот маршрут никуда букашку не возвращает. Он невоспроизводим повторно.

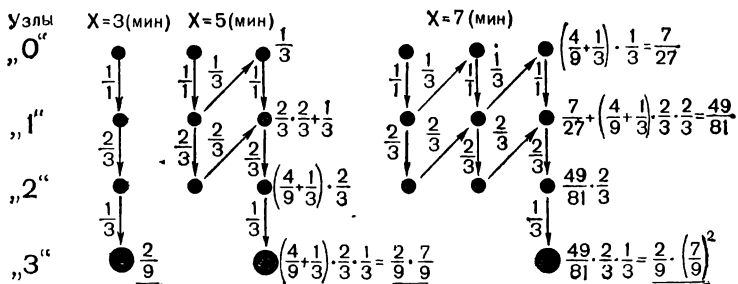


Рис. 47

Для подсчета вероятностей возможных значений продолжительности жизни букашки удобны схемы, изображенные на рисунке 47.

Полагая, что вид распределения случайной величины определен (геометрическое распределение), позаботимся о «технике» вычисления искомой средней продолжительности жизни ( $\bar{x}$ ) букашки. В нашем распоряжении теперь два «технических средства»:

- 1) уравнение для математического ожидания,
- 2) определение математического ожидания.

Применим оба.

1) Параметры уравнения (4) таковы:  $p = \frac{2}{9}$ ,  $q = \frac{7}{9}$ ,

$X = 3, 5, \dots, 2n + 1, \dots$

Напишем уравнение:  $\bar{x} = 3 \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{9} \cdot (\bar{x} + 2)$ , откуда  $\bar{x} = 10$  (минут).

2) Второй способ в данном случае потребует вычисления суммы бесконечного ряда, а для этого нужно прежде всего подметить формулу, выражающую вероятность значения  $(2n + 1)$  случайной величины  $X$  в зависимости от  $n$ . Подметив «общий член», сведем данные в таблицу распределения:

| $X$ | 3             | 5                               | 7  | ... | $2n + 1$   | ... |
|-----|---------------|---------------------------------|--|-----|--|-----|
| $P$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9}$ | $\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^2$ | ... | $\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$ | ... |



Искомое математическое ожидание

$$\begin{aligned} M\{X\} &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = \\ &= \frac{2}{9} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Первая сумма — это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - 7/9} = \frac{9}{2}.$$

Для вычисления второй суммы теперь мы также располагаем формулой (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

По этой формуле находим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1 - 7/9)^2} = \frac{81}{4}.$$

Теперь вычисляем  $M\{X\}$ :

$$M\{X\} = \frac{2}{9} \left( \frac{9}{2} + 2 \cdot \frac{81}{4} \right) = 10.$$

Естественно, что обе «техники» решения задачи дали один и тот же результат: средняя продолжительность жизни букашки равна 10 минутам.

Не забудьте и о том, что, если бы нам не удалось решение задачи на ее теоретической модели, и даже независимо от этого, в нашем распоряжении есть еще прием экспериментального решения в «лаборатории случайных чисел», взятых из таблицы или вырабатываемых «честным» кубиком, хорошо подбрасываемой монетой и другими средствами.

В силу закона больших чисел близость к истинному значению искомой величины достигается лишь при использовании значительного «массива» случайных чисел. Так как единолично выполнить и обработать, например, 1000 наблюдений трудоемко, то привлечите к эксперимен-

тальному решению задачи группу своих товарищей. Придумайте правило, по которому каждое число, взятое из таблицы случайных чисел, указывало бы определенное направление перемещения букашки, и регистрируйте 1000 раз число ходов, потребовавшихся для поимки воображаемой букашки в ловушку.

Если пожелаете привлечь игральный кубик, то можете воспользоваться, например, шифром перемещений, понятным из рисунка 48. Выпало на кубике одно или два очка — перемещайся по ребру, отмеченному цифрами 1, 2; выпало три или четыре очка — по ребру, отмеченному цифрами 3, 4 и т. д.

Среднее значение, полученное из тысячи результатов, не должно дать значительного отклонения от числа 10, если, конечно, не допустите просчетов в подсчетах.

Все равно: из простого любопытства или любознательности, из скепсиса и недоверия или восхищения волшебством математики непременно организуйте экспериментальное решение задачи. При этом проведите наблюдения и за близостью частот значений  $X = 3, 5, \dots$ , получившихся на практике, к априорным вероятностям теоретического распределения случайной величины  $X$ .

### СПОВА СРЕДНЯЯ КВАДРАТОВ

Оценив по трехбалльной системе уровни «помех», наблюдаемых в приборах (см. с. 133), мы сравнивали средние баллы. При этом для двух приборов ( $B$  и  $C$ ) получили  $\bar{x}_B = \bar{x}_C = 0,45$ .

Это число есть некий «центр», по обе стороны которого (на числовой оси) разбросаны сто значений случайной величины  $X_B$  — «оценки уровня помех для прибора  $B$ » и столько же значений случайной величины  $X_C$  — «оценки уровня помех для прибора  $C$ ». Все эти значения фактически гнез-

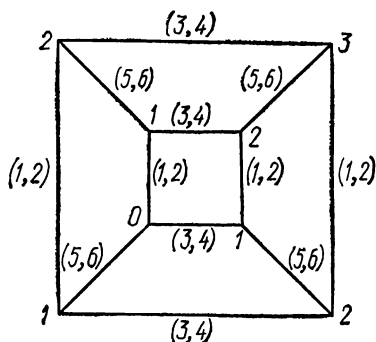


Рис. 48

дятся только в четырех точках числовой оси (0, 1, 2 и 3), отчего и создается относительная частота, но «заселяются» гнезда не одинаковым количеством значений одной и другой случайных величин. Получается различие в степени тесноты расселения значений, густоте их разброса.

Возникает надобность в специальной числовой характеристике разброса значений случайной величины.

Чтобы выработать подходящую числовую характеристику разброса, воспользуемся результатами 100 наблюдений уровней «помех» в приборах  $B$  и  $C$  (см. с. 133). Выпишем распределения относительных частот случайных величин  $X_B$  и  $X_C$ .

| Уровень «помех»   |            | 0    | 1    | 2    | 3    |
|---|------------|------|------|------|------|
| Относительная частота наблюдений «помех» данного уровня | Прибор $B$ | 0,78 | 0,08 | 0,05 | 0,09 |
|   | Прибор $C$ | 0,73 | 0,16 | 0,04 | 0,07 |

Разность между любым значением  $x_i$  случайной величины  $X$  и ее средним значением, т. е.  $x_i - \bar{x}$ , называют значением отклонения случайной величины  $X$  от ее среднего значения. При этом  $X - \bar{x}$  также величина случайная.

Так как  $X - \bar{x}$  примет какое-либо значение  $x_i - \bar{x}$  тогда и только тогда, когда случайная величина  $X$  примет значение  $x_i$ , то частота (и вероятность) каждого значения  $x_i - \bar{x}$  такова же, что и для  $x_i$ .

Применительно к случайной величине  $X_B - \bar{x}_B$  имеем:

|  |                    |                   |                   |                   |
|--|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| Случайная величина $Y$ — отклонение от среднего;<br>$Y = X_B - 0,45$ | $0 - 0,45 = -0,45$ | $1 - 0,45 = 0,55$ | $2 - 0,45 = 1,55$ | $3 - 0,45 = 2,55$ |
| Относительная частота отклонения от среднего, $p^*$                  | 0,78               | 0,08              | 0,05              | 0,09              |

Составьте аналогичную таблицу для значений случайной величины  $Z = X_C - 0,45$ .

Может быть «взвешенное среднее арифметическое всех найденных отклонений» и будет подходящей мерой разброса значений случайной величины  $X_B$  относительно ее среднего значения  $\bar{x}_B$ ? Принять или отвергнуть предложенную меру разброса?

Предположим, приняли. Вычисляем:

$$\bar{x}_Y = -0,45 \cdot 0,78 + 0,55 \cdot 0,08 + 1,55 \cdot 0,05 + 2,55 \cdot 0,09 = 0.$$

Получившийся результат означает, что нет никакого разброса. Но мы же знаем, что разброс есть. Значит, «среднее из отклонений от среднего значения» не годится в характеристики разброса значений случайной величины.

Поиск мы, конечно, продолжим, но задержимся на минуту на результате  $\bar{x}_Y = 0$ . Он вполне закономерен как частный случай более общего утверждения:

для любой случайной величины  $X$  имеем  $M\{X - m_X\} = 0$ .

Смотрите: в стихии случайностей объявился еще один закономерный факт. (Формальное доказательство отнесено в «Дополнения».)

Чтобы не происходило взаимопогашения отклонений «в среднем», надо составлять «среднее» из модулей отклонений, а еще лучше — из квадратов отклонений, как это мы делали в упрощенной статистике броуновского движения чернильных частиц в капле воды (см. с. 19).

Применительно к случайной величине  $Y^2 = (X_B - \bar{x}_B)^2$  получим:

|                             |             |          |          |          |
|-----------------------------|-------------|----------|----------|----------|
| $Y^2 = (X_B - \bar{x}_B)^2$ | $(-0,45)^2$ | $0,55^2$ | $1,55^2$ | $2,55^2$ |
| $p^*$                       | 0,78        | 0,08     | 0,05     | 0,09     |

Очевидно, что относительные частоты (как и вероятности) случайных величин  $X_B$ ,  $X_B - \bar{x}_B$  и  $(X_B - \bar{x}_B)^2$  одинаковы.

Вычисляем  $\bar{x}_{Y^2}$ :

$$\bar{x}_{Y^2} = (-0,45)^2 \cdot 0,78 + 0,55^2 \cdot 0,08 + 1,55^2 \cdot 0,05 + 2,55^2 \cdot 0,09 \approx 0,88.$$

Для случайной величины  $Z^2 = (X_C - \bar{x}_C)^2$  аналогичные вычисления дают  $\bar{x}_{Z^2} \approx 0,65$ . (Убедитесь!)

В ы в о д: разброс «помех» у прибора  $C$  меньше, чем у прибора  $B$ . Иначе говоря, прибор  $C$  дает более устойчивые показания относительно средних, следовательно, он лучше прибора  $B$ .

Пусть известно распределение вероятностей случайной величины  $X$ . Тогда математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины  $X$  от ее математического ожидания  $m_X$  называется *дисперсией* случайной величины  $X$  и обозначается символом  $\sigma^2 \{X\}$  (или  $D \{X\}$ ).

Слово «дисперсия» означает р а с с е я н и е. Значит, по определению

$$\| \sigma^2 \{X\} = M \{(X - m_X)^2\}.$$

Если дискретная случайная величина  $X$  задана таблицей распределения вероятностей, то

$$\| \sigma^2 \{X\} = M \{(X - m_X)^2\} = \sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2 \cdot p_i.$$

На практике более удобна другая числовая характеристика разброса значений случайной величины  $X$  — *среднее квадратическое отклонение* (с.к.о.),  $\sigma \{X\}$ , или  $\sigma_X$ .

Определением среднего квадратического отклонения случайной величины  $X$  является формула

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}.$$

Полезно заметить, что размерности с.к.о. и случайной величины одинаковы.

Для дискретной случайной величины  $X$  с.к.о. выразится соотношением:

$$\| \sigma_X = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2 \cdot p_i}.$$

Чем меньше величина с.к.о., тем меньше и разброс возможных значений случайной величины.

Из определения дисперсии и с.к.о. следует, что обе эти характеристики разброса неотрицательны и обращаются в нуль лишь для величины постоянной (не случайной).

Иногда более удобна такая формула:

$$\| \sigma_X^2 = M \{X^2\} - [M \{X\}]^2. \quad (5)$$

Выведем ее. Пользуясь свойствами м. о. (математическое ожидание суммы, постоянного и др.), преобразуем  $\sigma_X^2$ :

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= M \{ (X - m_X)^2 \} = M \{ X^2 - 2X \cdot m_X + m_X^2 \} = \\ &= M \{ X^2 \} - 2M \{ X \} \cdot m_X + m_X^2 = M \{ X^2 \} - 2[M \{ X \}]^2 + \\ &\quad + [M \{ X \}]^2 = M \{ X^2 \} - [M \{ X \}]^2.\end{aligned}$$

Квадратную скобку ввели в запись для облегчения восприятия формулы.

**Свойства дисперсии.** 1. Если  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — попарно независимые случайные величины, то

$$\sigma^2 \left\{ \sum_{i=1}^n X_i \right\} = \sum_{i=1}^n \sigma^2 \{ X_i \}.$$

(Доказательство дано в главе «Дополнения».)

2. Пусть  $X$  — число появлений события  $A$  (число успехов) в независимых испытаниях, в каждом из которых  $A$  появляется с вероятностью  $p$ . Тогда

$$\sigma^2 \{ X \} = n p q, \text{ где } q = 1 - p.$$

**Доказательство.** Если  $X_1$  — число появлений события  $A$  в первом испытании,  $X_2$  — число появлений события  $A$  во втором испытании, ...,  $X_n$  — число появлений события  $A$  в  $n$ -м испытании, то  $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , причем  $X_1, X_2, \dots, X_n$  — попарно независимые случайные величины. Мы знаем (с. 136), что математическое ожидание числа появлений события  $A$  в каждом отдельном испытании равно  $p$ , поэтому

$$M \{ X_1 \} = M \{ X_2 \} = \dots = M \{ X_n \} = p.$$

Пусть  $X_k$  — число появлений события  $A$  в испытании с номером  $k$ . Каждая такая случайная величина принимает лишь два значения: 0 и 1 — с вероятностями

$$P(X_k = 1) = p \text{ и } P(X_k = 0) = q = 1 - p.$$

Такие же значения и с такими же вероятностями принимает случайная величина  $X_k^2$ :

|         |     |     |
|---------|-----|-----|
| $X_k^2$ | 0   | 1   |
| $P$     | $q$ | $p$ |

Следовательно,

$$M \{X_k^2\} = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Применяя формулу (5), получаем:

$$\sigma_X^2 = M \{X_k^2\} - [M \{X_k\}]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Это значит

$$\sigma^2 \{X_1\} = \sigma^2 \{X_2\} = \dots = \sigma^2 \{X_n\} = pq$$

такова дисперсия числа появлений события  $A$  в одном испытании.

Дисперсия числа появлений события  $A$  в  $n$  испытаниях, по теореме о дисперсии суммы, равна:

$$\sigma^2 \{X\} = npq.$$

Словами: дисперсия  $\sigma^2 \{X\}$  числа появлений события  $A$  в  $n$  независимых испытаниях равна произведению числа испытаний на вероятность появления и на вероятность не появления события  $A$  в одном испытании.

**Высок ли иногда «потолок» у  $\sigma$ ?** Предполагается подвергнуть испытанию на прочность несколько выборок по 100 деталей в каждой. Для каждой детали вероятность поломки за время испытания равна 0,03.

По мнению практиканта, можно ожидать в среднем 3 поломанные детали на сотню проверяемых. Кроме того, он утверждает, что с.к.о. числа поломанных деталей не превзойдет пяти на сотню проверяемых деталей не только при  $p = 0,03$ , но и при любом другом значении  $p$ .

Обоснован ли теоретически прогноз такого «потолка» для с.к.о. случайного числа поломанных деталей при их испытании?

**Решение.** В нашем распоряжении имеются формулы для вычисления м. о. и дисперсии случайной величины  $X$  — числа успехов в независимых испытаниях с постоянной вероятностью каждого отдельного успеха:

$$m_X = np, \quad \sigma_X^2 = npq, \quad \text{или, иначе,} \quad \sigma_X^2 = np(1 - p).$$

По условию  $n = 100$ ,  $p = 0,03$ ,  $q = 0,97$ , откуда м.о. =  $100 \cdot 0,03 = 3$ . Прав практикант!

Далее, дисперсия равна 2,91 и с.к.о. =  $\sqrt{npq} = \sqrt{2,91} \approx 1,7$ .

Подтвердилась в данном частном случае (при  $p = 0,03$ ) и вторая часть предсказания практиканта: оказалось  $\sigma_X < 5$ .

Какие же соображения привели его к выводу о том, что именно 5 есть «потолок» для с.к.о. при любом значении  $p$  в условиях данной задачи?

«А ларчик просто открывался!» Из действующей для данной задачи формулы  $\sigma_X^2 = np(1-p)$  следует, что дисперсия  $\sigma_X^2$  есть *квадратичная функция* вероятности  $p$  появления события (поломанной детали):

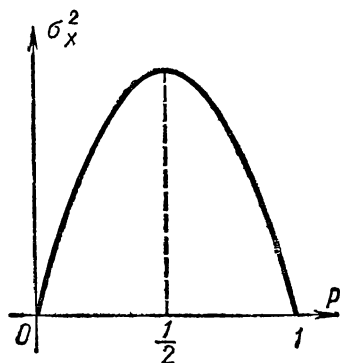


Рис. 49

$$\sigma_X^2 = -np^2 + np$$

$$(n > 0, 0 < p < 1).$$

График — парабола (рис. 49).

Наибольшего значения данная квадратичная функция достигает при  $p = \frac{1}{2}$ , которое равно  $\sigma_X^2$  (наиб) =  $-\frac{1}{4}n + \frac{1}{2}n = \frac{n}{4}$ . При  $n = 100$  получаем  $\sigma_X^2$  (наиб) = 25, откуда  $\sigma_X$  (наиб) =  $\sqrt{25} = 5$ .

Для самостоятельного решения.

1. Исходя из определения дисперсии для дискретной случайной величины  $X$ , докажите теорему:

если  $c$  — величина постоянная (не случайная), то

а)  $\sigma_X^2 \{c\} = c^2$ ;

б)  $\sigma_X^2 \{c \cdot X\} = c^2 \cdot \sigma_X^2$ ;

в)  $\sigma_X \{c \cdot X\} = |c| \cdot \sigma_X$ .

2. Если  $X$  — случайная величина, подчиненная геометрическому распределению вида  $P(X = n) = pq^{n-1}$ ,  $q = 1 - p$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то  $\sigma^2 \{X\} = qp^{-2}$ . Доказать.

Нужные сведения и формулы найдете в этой же главе.

## МАЛЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ С СЕРЬЕЗНЫМИ ПОСЛЕДСТВИЯМИ

В прикладных задачах встречаются ситуации, когда какие-то «точки» (детали прибора, частицы ядра атома, осколки снаряда, вызовы, поступающие на телефонную стан-



цию или станцию скорой помощи, число нарушений правил уличного движения и т. п.) случайно распределяются в некоторой области  $D$ : на линии, на плоскости, в пространстве или на «оси времени».

Пусть  $\bar{x}$  — среднее число «точек», попадающих в область  $D$  и располагающихся в этой области с постоянной средней плотностью  $\lambda$ . Тогда

$$\bar{x} = \lambda L, \quad \bar{x} = \lambda S, \quad \bar{x} = \lambda V, \quad \bar{x} = \lambda T,$$

где  $L, S, V, T$  — соответственно длина, площадь, объем области, промежуток времени.

Вероятность попадания отдельной «точки» в заданную область может быть мала и все-таки деталь отказывает, космическая частица попадает в приборный отсек «спутника», грубое нарушение правил движения происходит, являясь нередко причиной аварии, и т. д.

Рассматриваем случайную величину  $X$  — число точек, попадающих в область  $D$  при обязательном выполнении следующих предположений: «точки» попадают в неперекрывающиеся части области  $D$  независимым образом и по одиночке (не парами, тройками и т. д.).

Пусть для определенности область  $D$  — время и мы рассматриваем случайное распределение «точек» на оси времени. Условия физического процесса предполагаются неизменными (стационарный процесс) во времени и допускается возможность раздробить заданный промежуток времени на большое число  $n$  равных, неперекрывающихся интервалов, каждый из которых либо пуст (неудача), либо содержит одну «точку» (успех). В силу условия независимости неперекрывающихся интервалов вероятность успеха  $p_n$  должна быть одинаковой для всех интервалов разбиения.

Вероятность значения  $X = k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , является вероятностью  $k$  успехов в  $n$  испытаниях Бернулли:

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p_n^k \cdot q_n^{n-k}, \text{ где } q_n = 1 - p_n.$$

Чем больше  $n$  — число равных неперекрывающихся интервалов времени, тем меньше размер каждого интервала и тем меньше вероятность  $p_n$  попадания случайной «точки» в такой интервал.

По мере неограниченного возрастания  $n$  вероятность иметь в заданной области  $k$  случайных «точек» получается как предел выражения  $C_n^k p_n^k q_n^{n-k}$  при  $p_n \rightarrow 0$ .

Мы знаем, что в случае биномиального распределения вероятность нулевого значения ( $k = 0$ ) случайной величины  $X$  равна  $q_n^n = (1 - p_n)^n$  и что  $M\{X\} = \bar{x} = np_n$ .

Допустим  $n$  таково, что  $\bar{x} = np_n = 1$ , откуда  $p_n = \frac{1}{n}$  и

$$q_n^n = (1 - p_n)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-1}.$$

При больших значениях  $n$  выражение в квадратных скобках приближенно равно числу  $e$  (см. с. 120), следовательно,  $q_n^n \approx e^{-1} = \frac{1}{2,71828 \dots} \approx 0,368$ .

Вот и будем полагать, что при среднем значении  $\bar{x} = 1$  вероятность нулевого значения случайной величины  $X$  равна  $e^{-1}$ .

Для иллюстрации допустим, что в городское «Бюро забытых вещей» попадает в среднем один предмет в сутки ( $\bar{x} = 1$ ). В таком случае вероятность того, что в течение суток не будет переданных находок равна  $e^{-1} \approx 0,368$ . Пусть теперь «Бюро» получает в среднем два предмета в сутки ( $\bar{x} = 2$ ). Значит, передают в «Бюро» в среднем одну находку за половину суток. Вероятность нулевого исхода за полусутки равна  $e^{-1}$ . За сутки не будет поступлений находок в «Бюро», если их не будет за первую половину и за вторую половину суток (пересечение независимых событий). Поэтому вероятность того, что сутки пройдут без находок, доставляемых в «Бюро», равна:  $e^{-1} \cdot e^{-1} = (e^{-1})^2$ .

Обобщая, устанавливаем, что если  $\bar{x}$  — ожидаемое среднее значение случайной величины  $X$ , то вероятность нулевого значения равна:

$$P(X = 0) = (e^{-1})^{\bar{x}}.$$

Полученный результат является опорным для вычисления вероятностей последующих значений

$$X = 1, 2, \dots, k, \dots$$

На странице 114 была обоснована формула, определяющая отношение  $\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)}$ . Заменив  $m$  на  $k - 1$ , придадим ей следующий вид:

$$P_n(k) \approx \frac{p_n \cdot n - p_n \cdot k + p_n}{q_n \cdot k} \cdot P_n(k - 1).$$

Когда  $p_n$  очень мало, то  $q_n$  близко к 1. Отбросим очень малые числа  $p_n \cdot k$  и  $p_n$ , заменим  $q_n$  единицей и вместо  $p_n \cdot n$  запишем  $\bar{x}$ , тогда

$$P_n(k) \approx \frac{\bar{x}}{k} P_n(k-1).$$

За ненадобностью в дальнейшей записи опустим индекс  $n$ :

$$P(k) \approx \frac{\bar{x}}{k} P(k-1).$$

В чем особенность структуры получившегося равенства? Мы вновь (см. с. 62) встретились с возможностью *рекурсии* (возврата к известному). У нас образовалась *рекуррентная формула*, определяющая последовательно вероятности значений 1, 2, ...,  $k$ , ... случайной величины  $X$ .

Полагая  $k=1$ , получим:  $P(1) = \bar{x} P(0) = \bar{x} e^{-\bar{x}}$ ,

при  $k=2$ , соответственно  $P(2) = \frac{\bar{x}}{2} P(1) = \frac{\bar{x}^2}{1 \cdot 2} e^{-\bar{x}}$ ,

при  $k=3$   $P(3) = \frac{\bar{x}}{3} P(2) = \frac{\bar{x}^3}{3!} e^{-\bar{x}}$

и вообще при всяком натуральном  $k$ :

$$\text{|| } P(k) = \frac{\bar{x}^k}{k!} e^{-\bar{x}}.$$

Заполним таблицу:

| $X$ | 0              | 1                                 | 2                                   | ... | $k$                                 | ... |
|-----|----------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-----|-------------------------------------|-----|
| $P$ | $e^{-\bar{x}}$ | $\frac{\bar{x}}{1!} e^{-\bar{x}}$ | $\frac{\bar{x}^2}{2!} e^{-\bar{x}}$ | ... | $\frac{\bar{x}^k}{k!} e^{-\bar{x}}$ | ... |

Убедимся в том, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = e^{-\bar{x}} \left( 1 + \bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{2!} + \frac{\bar{x}^3}{3!} + \dots \right).$$

Выражение в скобках равно  $e^{\bar{x}}$  (формула приведена на с. 120). Следовательно,  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = e^{-\bar{x}} \cdot e^{\bar{x}} = 1$  и таблица определяет закон распределения — так называемое *распределение Пуассона*.

В случае биномиального распределения случайной величины  $X$  ее дисперсия равна, как мы знаем (см. с. 158),  $\sigma^2 \{X\} = np_n q_n$ . При предельном переходе к распределению Пуассона  $p_n \rightarrow 0$ , а  $q_n \rightarrow 1$ , следовательно,  $\sigma^2 \{X\} = np_n = x$ .

Значит, если известно или допущено считать, что случайная величина подчинена распределению Пуассона, то достаточно знать или вычислить всего лишь один параметр —  $\bar{x}$  — среднее число точек, попадающих в область  $D$ , чтобы полностью определилась таблица распределения. Кроме того, для распределения Пуассона

$$M \{X\} = \sigma^2 \{X\} = \bar{x}.$$

**Если телефонистка вышла.** В течение часа коммутатор получает в среднем 60 вызовов. Какова вероятность того, что за время 30 сек, в течение которых телефонистка отсутствовала, не будет ни одного вызова?

**Решение.**  $\bar{x} = \frac{60}{60 \cdot 2} = \frac{1}{2}$  вызова за 30 сек в среднем;

$$P(0) = (e^{-1})^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{0,368} \approx 0,61.$$

**Последствия космической радиации.** В приборный отсек космического корабля с вероятностью  $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$  попадает  $k$  микрочастиц,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Каждая из этих частиц может вызвать отказ некоторого прибора с вероятностью  $p$ . Вычислить вероятность отказа прибора.

**Решение.** Пусть  $X = 0, 1, 2, \dots, k, \dots$  и  $q = 1 - p$ . Событие  $A$  — прибор откажет. Тогда прибор не откажет ( $\bar{A}$ ), если  $X = 0$  или  $X = 1$  и эта частица не испортит прибор или  $X = 2$  и одна и вторая частицы не испортят прибор, и т. д. По теоремам о вероятности объединения и пересечения событий (с. 83 и 91) имеем:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} q + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} q^2 + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} q^k + \dots = \\ &= e^{-\lambda} \left[ 1 + (\lambda q) + \frac{(\lambda q)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda q)^k}{k!} + \dots \right] = \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda q} \text{ (см. с. 121),} \end{aligned}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - e^{-\lambda(1-q)} = 1 - e^{-\lambda p}.$$

Для самостоятельного решения.

1. Некоторый радиоприбор состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух и не менее двух электроэлементов в год? Ответ.  $P(X = 2) \approx 0,184$ ,  $P(X \geq 2) \approx 0,264$ .

2. Число частиц, излучаемых радиоактивным элементом в течение произвольного промежутка времени, имеет распределение Пуассона с  $\bar{x} = 1,51/\text{сек}$ . Найти вероятность того, что число частиц, излученных за две секунды, будет:

а) не больше двух; б) заключено в интервале  $[2; 4]$ .  
Ответ. а) 0,423; б) 0,616.

3. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется не более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1%. Ответ. 0,143.

### «НОРМАЛЬНЫЙ» ПРАВ СЛУЧАЙНОСТИ

О чем позаботились А. Муавр и П. Лаплас. Обувщики полагают, что около 30% женщин носят обувь 36 размера. С какой вероятностью сотрудники магазина могут ожидать, что из 300 покупательниц 75 имеют намерение приобрести обувь именно 36 размера? А какая вероятность аналогичных намерений у 90 покупательниц?

Типичная ситуация для применения биномиального распределения. Вероятность того, что одной покупательнице нужна пара обуви 36 размера равна  $p = 0,3$ . Вероятность противоположного события  $q = 0,7$ ;  $m = 75$ . Случайная величина  $X$  — число покупательниц, интересующихся обувью 36 размера. Возможные значения  $X$ :

$$0, 1, 2, \dots, 300.$$

Вероятность каждого из этих значений составляет определенную долю единицы (так как сумма вероятностей всех значений равна единице). Для случайной величины, распределенной по биномиальному закону, мы умеем вычислить математическое ожидание ( $\bar{x} = np$ ) и среднее квадратическое отклонение ( $\sigma = \sqrt{npq}$ ):

$$\bar{x} = 300 \cdot 0,3 = 90 \text{ (покупательниц),}$$

$$\sigma = \sqrt{300 \cdot 0,3 \cdot 0,7} = \sqrt{63} \approx 8 \text{ (покупательниц).}$$

Выразим искомые вероятности:

$$P_{300}(75) = C_{300}^{75} \cdot 0,3^{75} \cdot 0,7^{225},$$

$$P_{300}(90) = C_{300}^{90} \cdot 0,3^{90} \cdot 0,7^{210}.$$

Как видно, эти короткие выражения таят в себе трудные, утомительные вычисления. Поневоле захочешь спросить: «Нет ли замены на более удобную формулу, позволяющую добыть результат хотя бы и приближенный, но, если возможно, тем более точный, чем больше  $n$ ?»

Да, есть. Об этом позаботились А. Муавр (в 1730 г.) только для случая  $p = q = 0,5$  и П. Лаплас (в 1783 г.) для любого  $0 < p < 1$ .

Если вероятность  $p$  успеха в каждом испытании постоянна, но не равна нулю или единице, то вероятность получить  $x$  успехов в  $n$  испытаниях приближенно равна (тем точнее, чем больше  $n$ ) значению функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{при } t = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

(теорема Муавра — Лапласа).

После замены  $np = x$  и  $\sqrt{npq} = \sigma$  получим:

$$P(X = x) \approx \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \text{где } t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}.$$

Для дальнейшего упрощения и ускорения вычислений составлена таблица значений функции

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Небольшое извлечение из таблицы приведено ниже.

$$\text{Значения функции } \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

| $t$  | $\varphi(t)$ | $t$  | $\varphi(t)$ |
|------|--------------|------|--------------|
| 0,00 | 0,3989       | 1,50 | 0,1295       |
| 0,50 | 3521         | 1,88 | 0681         |
| 0,85 | 2780         | 2,00 | 0540         |
| 1,00 | 2420         | 2,50 | 0175         |
| 1,25 | 1826         | 3,00 | 0044         |

В справочниках содержатся достаточно полные таблицы.

Заметим, что нет нужды в отдельной таблице для отрицательных значений  $t$ , так как функция  $\varphi(t)$  четная.

В самом деле, нетрудно самостоятельно убедиться в том, что

$$\varphi(-t) = \varphi(t).$$

Желающих уяснить доказательство теоремы Муавра — Лапласа отсылаем к более обстоятельным пособиям по теории вероятностей.

В нашей задаче  $\bar{x} = 90$ ,  $\sigma = \sqrt{63} \approx 8$ ,  $x_1 = 75$ ,  $x_2 = 90$ . Вычисляем:  $t_1 \approx \frac{75-90}{8} \approx -1,88$ ,  $t_2 \approx \frac{90-90}{8} = 0$ .

По таблице находим:  $\varphi(1,88) \approx 0,0681$ ,  $\varphi(0) \approx 0,3989$ . Искомые вероятности приближенно равны:

$$P(X = 75) \approx \frac{1}{8} \varphi(-1,88) \approx 0,009 \approx 0,01,$$

$$P(X = 90) \approx \frac{1}{8} \varphi(0) \approx 0,05.$$

Для числа  $x_1 = 75$ , находящегося на удалении от математического ожидания (от 90) почти в  $2\sigma$ , вероятность в 5 раз меньше, чем для числа  $x_2 = 90$ , совпадающего с  $\bar{x}$ .

Полюбопытствуем, как велика вероятность какого-либо значения  $x$ , удаленного от математического ожидания в любую сторону на величину, равную приблизительно  $3\sigma$ .

Возьмем, например,  $x = 90 + 24 = 114$ ,  $t \approx \frac{114-90}{8} = 3$ ; по таблице  $\varphi(3) \approx 0,0044$ ,  $P(X = 114) \approx \frac{0,0044}{8} \approx 0,0005$  — практически нулевая вероятность.

При построении соответствующего «столбикового» графика получаются длинные хвосты, состоящие из точек, не отличимых по расположению от точек оси  $Ox$  (рис. 50).

Существенная часть графика размещается на интервале, протяженностью в  $3\sigma$  влево и столько же вправо от математического ожидания  $\bar{x}$ . Поэтому целесообразно все значения случайной величины  $X$  выразить в долях от  $\sigma$ , т. е. выбранную единицу масштаба раздробить на 8 (поскольку  $\sigma \approx 8$ ) равных промежутков. Вместе с концами отрезка получится 9 точек. Каждую из них надо считать соответ-

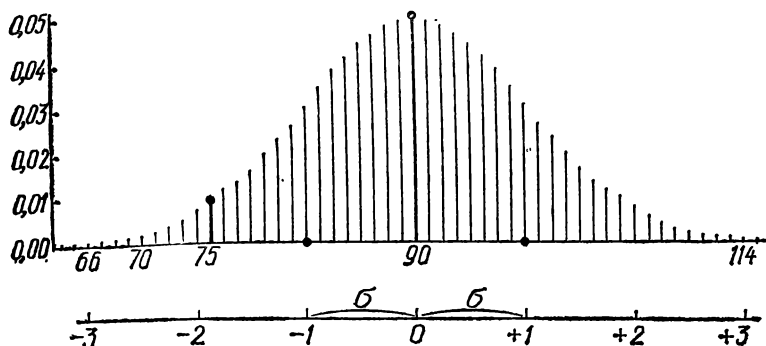


Рис. 50

ствующим значением случайной величины  $X$ , причем отсчет чисел лучше вести не от начала координат, а от математического ожидания  $\bar{x} = 90$ .

Его называют нормальным. Рассмотрим биномиальные распределения с произвольно намеченными  $n$ , например с  $n = 4$ ,  $n = 16$  и  $n = 64$ . Пусть  $p$  неизменно равно 0,5. Приступая к построению соответствующих «столбиковых» графиков, положим, что при любом  $n$  один и тот же отрезок служит масштабной единицей для значений случайной величины (рис. 51). И опять условимся дробить его всякий раз на  $\sigma$  равных промежутков, «укладывая» таким образом в масштабной единице  $\sigma + 1$  значений случайной величины.

При неограниченном увеличении  $n$  и неизменяющемся  $p$  увеличивается число значений случайной величины, подчиненной биномиальному распределению, увеличивается и  $\sigma = \sqrt{npq}$ . А масштабную единицу мы условились сохранять неизменной для всех графиков. В результате естественно происходит сбли-

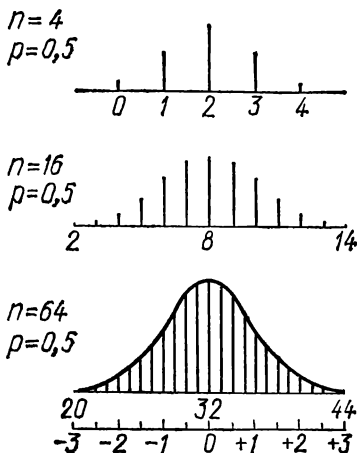


Рис. 51



жение точек «столбикового» графика (взгляните на рисунок 51).

Постепенно уплотняясь, они как бы «сплавляются» в сплошную (без дырок) линию — график функции.

На отрезке, принятом за общую масштабную единицу (масштаб расположен внизу рисунка), размещаются: 2 ординаты при  $n = 4$ , 3 ординаты при  $n = 16$ , 5 ординат при  $n = 64$ .

Образуется еще одна предельная форма биномиального распределения при  $n \rightarrow \infty$  — так называемое *нормальное распределение*.

При  $\bar{x} = 0$  и  $\sigma = 1$  нормальное распределение определяется функцией:

$$\| \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Функция  $\varphi(x)$  устанавливает соответствие между множеством всех действительных чисел  $x$  и множеством всех положительных чисел  $\varphi(x)$ , наибольшим из которых (судя по таблице) является  $\varphi(0) \approx 0,399$ . Мы скажем, что  $\varphi(x)$  есть непрерывная функция на всей числовой оси, не уточняя это понятие.

Если распределение случайной величины определяется при помощи непрерывной функции, то и сама случайная величина называется непрерывной (в отличие от дискретной).

Другие свойства функции  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ :

- а) если  $x \rightarrow \pm \infty$ , то  $\varphi(x) \rightarrow 0$ ;
- б) при  $-\infty < x < 0$   $\varphi(x)$  возрастает, при  $0 < x < \infty$  убывает;
- в) четная;
- г) при одинаковом масштабе для осей  $x$  и  $\varphi(x)$  график получается таким, как показано на рисунке 52.

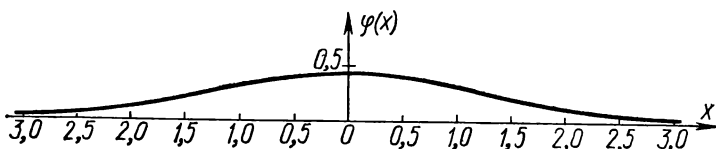


Рис. 52

Оцените «на глаз» площадь фигуры, ограниченной осью  $Ox$  и кривой  $\varphi(x)$ . Действительный результат весьма примечателен: площадь равна точно *одной квадратной единице*. Вместо доказательства воспользуйтесь способом практической приближенной проверки этого утверждения при помощи палетки, на роль которой вполне пригодна миллиметровая бумага.

Обратите внимание: именно *площадь* под графиком функции  $\varphi(x)$  равна 1, а не сумма ординат всех точек графика, как в распределении вероятностей дискретной случайной величины. Значит, вероятность какого-либо события, связанного с непрерывной случайной величиной, надо воспринимать как некоторую долю всей площади под графиком  $\varphi(x)$  — долю единицы.

Но теперь между любыми двумя значениями  $x_0$  и  $x$  непрерывной случайной величины «втиснуто» неограниченно много ее значений-точек, даже если отрезок  $[x_0; x]$  сколь угодно мал (рис. 53).

О вероятности какого же события рассказывает численное значение площади выделенной фигуры — криволинейной трапеции, основанием которой является отрезок  $[x_0; x]$ ? Очевидно, о вероятности события: попадание случайной точки  $X$  в отрезок  $[x_0, x]$ .

Численное значение площади фигуры, расположенной над отрезком  $[x_0, x]$  есть вероятность, с которой можно утверждать, что случайная величина  $X$  примет значение, находящееся в границах этого отрезка; записываем так:

$$P(x_0 < X < x).$$

Если заставить отрезок  $[x_0, x]$  стягиваться в точку, например при  $x \rightarrow x_0$ , то соответствующая криволинейная трапеция, постепенно деформируясь, будет стягиваться в отрезок (в ординату точки  $x_0$ ) — свойство, определяющее непрерывность.

Площадь криволинейной трапеции при этом будет стремиться к нулю. Но численное значение площади есть вероятность «попадания» случайной величины  $X$  на участок  $[x_0, x]$ ,

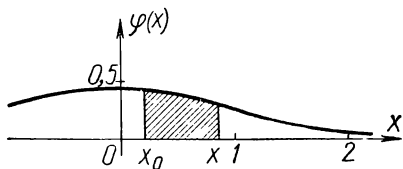


Рис. 53

значит, по мере того как  $x \rightarrow x_0$  и вероятность стремится к нулю, т. е.

$$P(x_0 < X < x) \rightarrow 0.$$

В конечном счете получается, что  $P(X = x_0) = 0$ , т. е. вероятность того, что непрерывная случайная величина  $X$  примет одно из своих возможных значений (заранее намеченное), следует считать равной нулю.

Здесь это не означает, что событие  $X = x_0$  невозможно. Напротив, случайная величина  $X$  всякий раз принимает какое-либо из возможных значений, но возможных значений неограниченно много даже вблизи заранее намеченной точки. Вот в теории и приходится поневоле считать бесконечно малой величиной вероятность каждого отдельного значения непрерывной случайной величины.

Но если вероятность каждого отдельного значения случайной величины  $X$  равна нулю, то какой же вероятностный смысл может иметь ордината каждой отдельной точки графика функции  $\varphi(x)$ ?

Возьмем какой-нибудь отрезок оси  $Ox$  под графиком  $\varphi(x)$  и разобьем его на  $n$  участков одинаковой длины (рис. 54). Длину участка обозначим через  $\Delta x$  (дельта икс).

Вам по школьному курсу алгебры, вероятно, знакомо такое обозначение. Каждому участку  $\Delta x$  соответствует определенная вероятность  $p_n$  попадания рассматриваемой случайной величины на этот участок, численно равная площади заштрихованной фигуры — т о ч н о или площади прямоугольника с тем же основанием  $\Delta x$  и высотой, равной одной из ординат, — п р и б л и ж е н н о, но тем точнее, чем больше  $n$  и, следовательно, чем меньше  $\Delta x$ . (На стадии первоначального знакомства доверимся только силе воображения.)

Пусть участок  $\Delta x$  есть материальный стержень (без толщины) и имеет массу  $\Delta m$ . Разделим  $\Delta m$  на  $\Delta x$ . Получившееся число физики называют средней (линейной)

плотностью данного участка стержня. Если с изменением  $\Delta x$  отношение  $\frac{\Delta m}{\Delta x}$  не остается

неизменным, то говорят, что стержень имеет

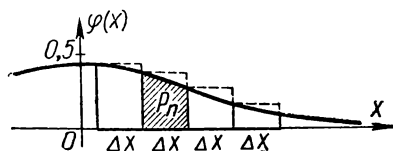


Рис. 54

неоднородную массу. В этом случае отношение  $\frac{\Delta m}{\Delta x}$  при очень малом  $\Delta x$  понимают как «плотность стержня в точке» (в которую стягивался бы участок  $\Delta x$  при стремлении  $\Delta x$  к нулю).

Подобно тому как масса неоднородного стержня распределяется неравными порциями  $\Delta m$  между равными участками  $\Delta x$ , так и вероятность (попадания случайной точки на выделенный отрезок оси  $Ox$ ) распределяется неравными порциями  $p_n$  между равными участками  $\Delta x$ . По аналогии с плотностью стержня отношение  $\frac{p_n}{\Delta x}$  при очень малом  $\Delta x$  понимают как своего рода «плотность вероятности в точке  $x$ » (в которую стягивался бы участок  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ).

Считая  $p_n$  при очень малом  $\Delta x$  площадью прямоугольника с основанием  $\Delta x$  и высотой, равной ординате  $\varphi(x)$ , получаем, что

$$\varphi(x) \approx \frac{p_n}{\Delta x}$$

и вместе с тем — вероятностную интерпретацию ординаты любой точки графика функции  $\varphi(x)$ , а именно:  $\varphi(x)$  есть плотность вероятности в точке  $x$ , тогда:

$\varphi(x_0)$  — плотность вероятности в точке  $x_0$ ,

$\varphi(x_1)$  — плотность вероятности в точке  $x_1$  и т. д.

Понятие «плотность вероятности» существенно связано с непрерывностью, поэтому для дискретных случайных величин оно лишено смысла.

С этим понятием связано и название функции  $\varphi(x)$ : ее называют плотностью нормального распределения. Форма графика этой функции при любом заданном  $\bar{x}$  и любом заданном  $\sigma$  аналогична форме «стандартной» нормальной кривой, представленной на рисунке 52.

Общий вид формулы, выражающей плотность (закон) нормального распределения, таков:

$$\varphi(x, m, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где  $m = \bar{x}$  — математическое ожидание случайной величины  $X$ , а  $\sigma$  — ее среднее квадратическое отклонение.

В любом случае «нормальная кривая» симметрична относительно прямой  $x = m$ . С изменением величины  $m$

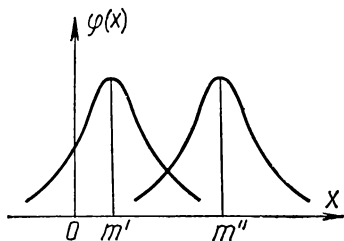


Рис. 55

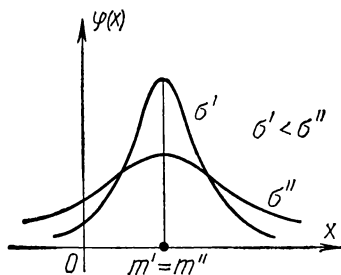


Рис. 56

нормальная кривая, не изменяя своей формы, смещается вдоль оси абсцисс (рис. 55).

С увеличением  $\sigma$  (с.к.о.) кривая как бы «расплющивается» вдоль оси абсцисс, а при уменьшении  $\sigma$  становится шпалеобразной (рис. 56). Это видно из того, что максимальная ордината нормальной кривой равна  $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$  (при  $x = m$ )

и, следовательно, увеличивается с уменьшением  $\sigma$ .

Кроме того, не надо забывать, что площадь, ограниченная кривой распределения, при любом значении  $\sigma$  должна равняться единице, следовательно, чем меньше величина  $\sigma$ , т. е., чем плотнее группирование возможных значений случайной величины около центра рассеяния, тем острее, шпалеобразнее форма нормальной кривой.

Нормальное распределение случайной величины занимает значительное место в применении методов теории вероятностей к решению самых разнообразных прикладных задач. Если значения случайной величины возникают в результате большого числа независимых воздействий, ни одно из которых существенно не превалирует над остальными, то почти всегда оправдывается предположение о том, что такая случайная величина подчинена нормальному закону распределения.

**Примеры:** случайные ошибки измерения, линейные размеры деталей при массовом производстве, отклонения в результатах химических, спектральных и других анализов и т. п.

**«Запандя» для случайной точки.** Если случайная величина  $X$  действительно подчинена нормальному распределению с подходяще подобранными параметрами  $m$  и  $\sigma$ , то

это значит, что при достаточно большом числе наблюдаемых независимых ее значений относительная частота попаданий точек (значений случайной величины) в заданный интервал  $[x_0, x]$  (скажем образно — в «ловушку») приблизительно равна численному значению соответствующего кусочка площади (рис. 57).

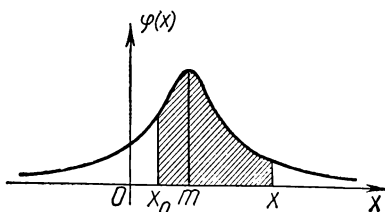


Рис. 57

Для определения величины такой площади применяется математическое действие—интегрирование, позволяющее свести решение задачи к использованию таблицы значений площадей криволинейных трапеций, ограниченных стандартной нормальной кривой

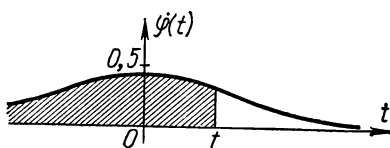


Рис. 58

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Как упоминалось, стандартизация здесь достигается тем, что значения аргумента  $t$  вычисляются в долях  $\sigma$  и отсчет ведется от точки  $m$ , поэтому при всяком заданном  $x$  соответствующее ему значение  $t = \frac{x-m}{\sigma}$ .

Пусть левая граница основания заштрихованной фигуры удалена «в минус бесконечность», а правой границей является произвольная точка  $t$  оси  $Ot$  (рис. 58).

Площадь такой фигуры является некоторой функцией  $t$ .

Обозначим ее  $\Phi^*(t)$ . Несколько избранных значений этой функции сведены в следующую таблицу:

| $t$   | $\Phi^*(t)$ | $t$  | $\Phi^*(t)$ | $t$  | $\Phi^*(t)$ |
|-------|-------------|------|-------------|------|-------------|
| —0,00 | 0,5000      | 0,00 | 0,5000      | 1,96 | 0,9750      |
| —0,50 | 0,3085      | 0,50 | 0,6915      | 2,00 | 0,9772      |
| —1,50 | 0,0668      | 1,00 | 0,8413      | 2,60 | 0,9953      |
| —3,00 | 0,0014      | 1,28 | 0,8997      | 3,00 | 0,9986      |
| —3,80 | 0,0001      | 1,50 | 0,9332      | 3,80 | 0,9999      |
| —3,90 | 0,0000      | 1,65 | 0,9505      | 3,90 | 1,0000      |

Если левая граница основания фигуры — точка  $t_0$ , а правая — точка  $t$ , то площадь фигуры с основанием  $t_0 t$ , очевидно, равна

$$\Phi^*(t) - \Phi^*(t_0).$$

Пусть, например,  $t_0 = -0,5$ ,  $t = 1$ . В таблице находим  $\Phi^*(-0,5) \approx 0,3085$ ,  $\Phi^*(1) \approx 0,8413$ .

Тогда площадь фигуры с основанием  $t_0 t$  равна:

$$\Phi^*(1) - \Phi^*(-0,5) \approx 0,8413 - 0,3085 \approx 0,5.$$

Вернемся к рисунку 57. Как вычислить площадь фигуры с границами основания  $x_0$  и  $x$  при условии, что известны значения  $m$  и  $\sigma$ ?

Решение. Найдем  $t_0 = \frac{x_0 - m}{\sigma}$ ,  $t = \frac{x - m}{\sigma}$  и по таблице

$$\Phi^*(t_0) = \Phi^*\left(\frac{x_0 - m}{\sigma}\right), \quad \Phi^*(t) = \Phi^*\left(\frac{x - m}{\sigma}\right).$$

Искомая площадь равна:

$$\Phi^*\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{x_0 - m}{\sigma}\right).$$

А это и есть вероятность попадания случайной точки  $X$  на участок  $(x_0, x)$ :

$$\| \quad P(x_0 < X < x) = \Phi^*\left(\frac{x - m}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{x_0 - m}{\sigma}\right).$$

Для самостоятельного решения. Зная, что вся площадь под стандартной нормальной кривой (рис. 59) равна 1 и площадь фигуры на участке  $(-\infty, -t)$  равна площади фигуры на участке  $(t, +\infty)$ , убедитесь в справедливости формулы:

$$\| \quad \Phi^*(-t) = 1 - \Phi^*(t). \quad (6)$$

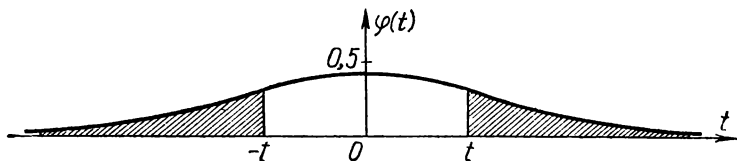


Рис. 59

**«Нормальное» поведение рыбок, втулок и пороховых зарядов.** **Задача 1.** Вес вылавливаемых в пруду рыб подчиняется нормальному закону с математическим ожиданием  $m = 375$  г и средним квадратическим отклонением  $\sigma = 25$  г. Найти вероятность того, что вес одной пойманной рыбы будет:

- а) заключен в пределах от 300 г до 425 г;
- б) не более 450 г;
- в) не менее 400 г.

**Задача 2.** На станке изготавливаются втулки. Длина  $l$  втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, и имеет среднее значение  $l_{\text{ср}} = 20$  см и дисперсию, равную  $0,04 \text{ см}^2$ .

а) Найти вероятность того, что длина втулки будет заключена между  $19,7$  см и  $20,3$  см, т. е. отклонение в ту или другую сторону не превзойдет  $0,3$  см.

б) Какую длину изделия можно гарантировать с вероятностью  $0,95$ ?

**Задача 3.** Заряд охотничьего пороха отвешивают на весах. Случайная ошибка показаний весов распределена по нормальному закону со средней квадратической ошибкой  $200$  мг. Номинальный вес порохового заряда равен  $2,3$  г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда  $2,5$  г.

Решение задачи 1. а)  $P(300 < X < 425) = \Phi^*\left(\frac{425 - 375}{25}\right) - \Phi^*\left(\frac{300 - 375}{25}\right) = \Phi^*(2) - \Phi^*(-3) \approx 0,9772 - 0,0014 \approx 0,976;$

б)  $P(0 < X < 450) = \Phi^*\left(\frac{450 - 375}{25}\right) - \Phi^*\left(\frac{0 - 375}{25}\right) = \Phi^*(3) - \Phi^*(-15) \approx 0,9986 - 0 \approx 0,999;$

в)  $P(400 < X < \infty) = 1 - \Phi^*\left(\frac{400 - 375}{25}\right) \approx 0,16.$

Решение задачи 2. а) Так как  $\sigma_l^2 = 0,04$ , то  $\sigma_l = 0,2$ ,

$$P(|l - 20| < 0,3) = \Phi^*\left(\frac{0,3}{0,2}\right) - \Phi^*\left(-\frac{0,3}{0,2}\right) \approx 0,87.$$

б) Дано:  $P(|l - 20| < x) = 0,95$ . Н а й т и  $x$ .

$$P(|l - 20| < x) = \Phi^*\left(\frac{x}{0,2}\right) - \Phi^*\left(-\frac{x}{0,2}\right);$$



по формуле (6) имеем:  $F(|l - 20| < x) = \Phi^*\left(\frac{x}{0,2}\right) -$   
 $- \left[1 - \Phi^*\left(\frac{x}{0,2}\right)\right] = 2\Phi^*\left(\frac{x}{0,2}\right) - 1 = 0,95, \Phi^*\left(\frac{x}{0,2}\right) = 0,975.$

По значению функции (0,975) находим в таблице соответствующее значение аргумента  $\left(\frac{x}{0,2}\right)$ :

$$\frac{x}{0,2} \approx 1,96, \quad x \approx 0,4.$$

Следовательно, с вероятностью 0,95 можно надеяться на изготовление втулки длиной  $20 \pm 0,4$  см.

**Решение задачи 3.** Случайная величина  $X$  — превышение весовой нормы порохового заряда, ведущее к повреждению ружья. Теоретически возможно любое превышение, поэтому нам нужно вычислить вероятность события  $0,2 < X < \infty$ . Получаем:

$$P(0,2 < X < \infty) = \Phi^*(\infty) - \Phi^*\left(\frac{0,2}{0,2}\right) = 1 - \Phi^*(1) \approx 0,16.$$

**Измерения без погрешности — как океан без соли.** Абсолютно точных результатов измерений не бывает. Отклонение результата измерения от точного значения измеряемой величины (погрешность измерения) является случайной величиной, относительно которой обычно вполне оправдывается гипотеза о нормальном распределении.

Наблюдения показывают, что если измерительный прибор и с п р а в е н, то при достаточно большой серии измерений получающиеся погрешности не бывают все одного и того же знака, например только положительные.

Математическое ожидание ( $m_x$ ) таких случайных погрешностей ( $X$ ) считается практически равным нулю,  $m_x = 0$ .

В противоположном случае, когда прибор с и с т е м а т и ч е с к и завышает (или занижает) показания примерно на одно и то же число  $\alpha \neq 0$  (систематическая погрешность прибора), это число и является математическим ожиданием ( $m_x = \alpha$ ) случайной погрешности ( $X$ ).

**Задача 1.** Проверка «параметров» самодельного дальномера показала, что прибор дает систематическую ошибку 10 м в сторону занижения дальности, а среднее

квадратическое отклонение ( $\sigma_x$ ) случайных ошибок ( $X$ ) равно 20 м. Этим прибором пришлось однажды измерить заданную дальность. С какой вероятностью можно надеяться, что:

а) погрешность результата не превосходит по абсолютной величине 30 м;

б) измеренная дальность не превосходит истинной?

**Задача 2.** В результате проверки точности работы прибора установлено, что 80% ошибок не вышло за пределы  $\pm 20$  м, а остальные ошибки вышли за эти пределы.

Определить среднее квадратическое отклонение ошибок прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не дает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону.

**Решение задачи 1.** а)  $X$ —погрешность измерения;

$$m_x = -10, \sigma_x = 20, P(-30 < X < 30) = \Phi^*\left(\frac{30 - (-10)}{20}\right) - \Phi^*\left(\frac{-30 - (-10)}{20}\right) = \Phi^*(2) - \Phi^*(-1) \approx 0,9772 - 0,1587 \approx 0,82;$$

$$\text{б) } P(-\infty < X < 0) = \Phi^*\left(\frac{0 + 10}{20}\right) - \Phi^*(-\infty) \approx 0,6915 - 0 \approx 0,7.$$

**Решение задачи 2.** Дано  $P(-20 < X < 20) = 0,8$ .

Найти  $\sigma_x = \sigma$ .

$$\Phi^*\left(\frac{20}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(-\frac{20}{\sigma}\right) = 0,8, \quad \Phi^*\left(\frac{20}{\sigma}\right) - \left[1 - \Phi^*\left(\frac{20}{\sigma}\right)\right] = 0,8,$$

$$\Phi^*\left(\frac{20}{\sigma}\right) = 0,9. \text{ В таблице находим: } \Phi^*(1,28) \approx 0,8997 \approx 0,9.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{20}{\sigma} \approx 1,28, \sigma \approx \frac{20}{1,28} \approx 15,6 \text{ (м).}$$

**Великолепные «три сигма».** (Для самостоятельного решения.)

Докажите, что значения погрешности измерения  $X$ , подчиненной нормальному распределению, при большом количестве измерений в 99,7% случаев (практически все) расположатся в пределах «три сигма» слева и справа от  $m_x$ ;  $\sigma_x$ —среднее квадратическое отклонение.

**Неравенство Чебышева.** Пусть  $X$  — случайная величина, имеющая дисперсию  $\sigma^2$  и математическое ожидание  $M\{X\} = \bar{x}$ ;  $\varepsilon$  — любое положительное число; тогда

$$P\{|X - \bar{x}| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (7)$$

Если  $\varepsilon$  выражать в единицах, одинаковых с  $\sigma$ , т. е. принять  $\varepsilon = k\sigma$ , то

$$P\{|X - \bar{x}| < k\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

В частности, при  $k = 3$  ( $\varepsilon = 3\sigma$ ) получаем:

$$P\{|X - \bar{x}| < 3\sigma\} \geq \frac{8}{9},$$

или

$$P\{|X - \bar{x}| < 3\sigma\} \geq 0,88.$$

Значит, при любом распределении величины  $X$  не менее чем 88% ее значений находится в интервале

$$(\bar{x} - 3\sigma; \bar{x} + 3\sigma).$$

Неравенство (7), носящее имя крупнейшего математика прошлого века, явилось для П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников — наиболее ярких выразителей созданного Чебышевым научного направления — А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918) отправным положением в серии следовавших затем фундаментальных исследований и обобщений закона больших чисел (в главе «Дополнения» см. «Теорема Чебышева — закон больших чисел»).

Пафнутий Львович Чебышев вывел русскую школу теории вероятностей на первое место в мире. Это место сохраняется и до сих пор. Наши соотечественники — С. Н. Бернштейн, А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров, В. И. Романовский, Б. В. Гнеденко, В. С. Пугачев обогатили «науку о случайном» глубокими исследованиями и открытиями, получившими мировое признание.

## РАСЧЕТЛИВОЕ ДОВЕРИЕ

Ошибку также невозможно не допустить в лабораторный эксперимент, как невозможно не допустить бактерию в больницу.

С. Дайменд,  
«Мир вероятностей». М., 1970

## О ЧЕМ РАССКАЗЫВАЮТ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ?

Имеется набор кусков одного минерала постоянной плотности. Истинное значение плотности ( $x$ ) нам неизвестно. Измеряя плотность каждого куска минерала, мы получаем статистический ряд («выборку») результатов

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

В состав статистического ряда включаются все результаты измерения: несовпадающие и совпадающие. Индекс у буквы  $x$  является лишь порядковым номером измерения.

Каждое измерение, получившее порядковый номер  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), рассматривается как случайный результат  $x_k$ ; случайность проявляется в том, что при повторении серии измерений  $k$ -е измерение может дать иное значение  $x_k$ .

Любой из получившихся результатов претендует быть приближенным значением величины  $x$  — плотности минерала, но предпочитают обычно среднее арифметическое из этих чисел:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1)$$

и полагают:  $x \approx \bar{x}$ .

Почему? Чем «среднее арифметическое» предпочтительнее какого-нибудь одного из полученных результатов измерения или иного среднего?

Ответ на этот вопрос вынесен в главу «Дополнения».

Число  $\bar{x}$  называют *оценкой* истинного значения измеряемой постоянной величины  $x$  (плотности).

Рассмотрим другой физический «показатель» (признак) набора кусков минерала — вес случайно выбранного куска. У этого показателя (а не у веса каждого конкретного куска) нет постоянного «истинного значения»; это случайная величина, принимающая определенное значение (вес конкретного куска), но заранее неизвестное — до взвешивания определенного куска, случайно выбранного из данного набора.

Вес куска минерала, как всякая случайная величина, подчиняется некоторому определенному закону распределения с характеристиками  $m$  и  $\sigma$  (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение), истинные значения которых нам неизвестны.

Цель измерения и обработки результатов — найти приближенные значения этих параметров (дать их «оценки»), на основе которых в свою очередь можно было бы оценить «вероятностное значение» измеряемого показателя, т. е. вычислить вероятность того, что возможное значение показателя заключено между определенными границами. Например, получить основание сказать: с вероятностью 0,9 вес куска минерала (точнее, математическое ожидание веса) заключен в интервале 380 — 420 г.

Оценки (приближенные значения) объективно существующих, но нам неизвестных математического ожидания ( $m_x$ ) и среднего квадратического отклонения ( $\sigma_x$ ) случайной величины  $X$  будем обозначать  $\tilde{m}_x$  и  $\tilde{\sigma}_x$ :

$$m_x \approx \tilde{m}_x, \sigma_x \approx \tilde{\sigma}_x. \quad (2)$$

Здравый смысл наводит на мысль создавать расчетные формулы для оценок неизвестных  $m_x$  и  $\sigma_x$  по аналогии с формулами, определяющими эти параметры для дискретной случайной величины, закон распределения которой известен. Разумеется, вместо полного количества возможных значений случайной величины  $X$  возьмем все имеющиеся в нашем распоряжении результаты измерений (статистический ряд значений  $x_i$ ). При этом в качестве аналога неизвестных вероятностей ( $p$ ) значений случайной величины  $X$  естественно взять относительные частоты ( $p^*$ ) этих значений (статистические вероятности).

Согласно закону больших чисел при большом количестве  $n$  полученных значений случайной величины, говоря упрощенно, надеемся, что  $p^* \approx p$  с вероятностью, близкой к 1. Но при малом числе  $n$  измерений, очевидно, усиливается опасность получения, может быть, уж слишком ненадежных оценок неизвестных  $m_X$  и  $\sigma_X$ , не обеспечивающих приемлемой вероятности для малых отклонений оценок математического ожидания и среднего квадратического отклонения от их истинных значений. Поэтому приступим к делу осторожно — с оглядкой на указанную опасность.

Измеряя по одному разу вес каждого из  $n$  случайно выбранных кусков минерала, принадлежащих определенному большому их набору, мы получаем  $n$  значений одной случайной величины  $X$  — «вес куска минерала» —

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Относительная частота этих значений равна  $p^* = \frac{1}{n}$  (каждое из  $n$  измерений считаем по одному разу), поэтому в соответствии с высказанной рекомендацией:

$$\tilde{m}_X = \sum_{i=1}^n x_i p^* = \frac{1}{n} x_1 + \frac{1}{n} x_2 + \dots + \frac{1}{n} x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

Так и будем *среднее арифметическое* результатов измерений всегда считать *оценкой* (приближенным значением) истинного математического ожидания случайной величины  $X$ :

$$m_X \approx \tilde{m}_X = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (3)$$

Напомним: если прибор, с помощью которого производят измерения, не дает систематической ошибки, то среднее арифметическое из  $n$  результатов измерения определенной постоянной величины  $x$  есть *оценка ее собственного значения*:

$$x \approx \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (4)$$

Аналогично для получения оценки истинной дисперсии ( $\sigma_X^2$ ) случайной величины  $X$  в формуле, выражающей точнее ее значение  $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2 p_i$ , заменим  $m_X$  оценкой  $\tilde{m}_X$ , но все  $p_i$  заменим не  $\frac{1}{n}$ , а  $\frac{1}{n-1}$ .

Нарушение порядка в замене  $p_i$  числом  $\frac{1}{n-1}$ , а не статистической вероятностью  $p^* = \frac{1}{n}$  как раз и допущено нами ради повышения «надежности» оценки дисперсии, в особенности для тех случаев, когда приходится давать оценку, располагая очень коротким статистическим рядом результатов измерений.

Обстоятельное разъяснение причин, по которым оценка дисперсии (5) более «доброкачественна», чем какие-либо другие возможные оценки дисперсии, было бы обременительным для данной книги, не претендующей быть учебником.

В завершение разговора об оценке дисперсии ( $\sigma_x^2$ ), а следовательно, и среднего квадратического отклонения ( $\sigma_x$ ) позвольте считать, что мы согласились пользоваться формулами:

$$\left\| \sigma_x^2 \approx \tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m}_x)^2, \right. \quad (5)$$

$$\left\| \sigma_x \approx \tilde{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m}_x)^2}. \right. \quad (6)$$

**Кто работает лучше: А или Б?** Они оба изготовили по 70 одинаковых деталей, для которых поле допуска размеров 50,04—50,28 мм.

Составлены распределения сделанных каждым рабочим деталей по их размерам:

| Размер детали в мм | Количество деталей данного размера |              |
|--------------------|------------------------------------|--------------|
|                    | у рабочего А                       | у рабочего Б |
| 50,02              | 1                                  | 0            |
| 50,06              | 7                                  | 2            |
| 50,10              | 9                                  | 5            |
| 50,14              | 26                                 | 13           |
| 50,16              | 0                                  | 2            |
| 50,18              | 14                                 | 14           |
| 50,22              | 7                                  | 19           |
| 50,26              | 5                                  | 8            |
| 50,28              | 1                                  | 6            |
| 50,30              | 0                                  | 1            |

Качество работы тем выше, чем меньше разброс размеров относительно середины поля допуска.

О т в е т. Рабочий А работает лучше, чем рабочий Б. Вычисления показывают, что у А разброс размеров деталей относительно середины поля допуска меньше, чем у Б. (Убедитесь!)

Кроме того,  $\bar{x}_A = 50,15$  ближе к середине поля допуска, чем  $\bar{x}_B = 50,19$ , что может быть объяснено не только высоким мастерством рабочего А, но и лучшей наладкой его станка.

### УСТОЙЧИВОСТЬ СРЕДНЕГО АРИФМЕТИЧЕСКОГО

Пусть произведено  $n$  измерений (наблюдений) случайной величины  $X$  и получена серия значений

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Говорят еще иногда: получена случайная выборка из большого (а может быть, и бесконечно большого) количества возможных значений случайной величины  $X$ . Значит, допускается возможность осуществления и других серий (случайных выборок) значений той же величины  $X$ :

$$x_1', x_2', \dots, x_n'; \quad x_1'', x_2'', \dots, x_n'',$$

Поэтому иногда удобнее считать, что мы имеем дело не с  $n$  случайными значениями одной величины  $X$ , а с  $n$  случайными независимыми величинами:

$X_1$ , принявшей случайное значение  $x_1$ ,

$X_2$ , принявшей случайное значение  $x_2$ ,

$\vdots$   
 $X_n$ , принявшей случайное значение  $x_n$ .

Поскольку случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_n$  возникают в связи с измерением одной и той же случайной величины  $X$ , то их математические ожидания естественно считать одинаковыми и равными математическому ожиданию величины  $X$

$$m_{X_1} = m_{X_2} = \dots = m_{X_n} = m_X \quad (7)$$

и дисперсии считать одинаковыми и равными дисперсии величины  $X$

$$\sigma_{X_1}^2 = \sigma_{X_2}^2 = \dots = \sigma_{X_n}^2 = \sigma_X^2. \quad (8)$$

Зададим себе такой вопрос: если оценкой неизвестного математического ожидания измеряемой случайной величи-



ны считать среднее арифметическое всех результатов измерения (данной выборки):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

а не отдельные значения  $x_i$ , то достигается ли какой-либо выигрыш в приближении к истинному значению математического ожидания случайной величины  $X$ , к  $m_X$ ?

Чтобы ответить на этот вопрос, введем случайную величину

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

полагая, что ее возможным значением является число

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

где каждое  $x_i$  есть значение соответствующей случайной величины  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Зная, что

$$m_{X_i} = m_X, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

и

$$\sigma_{X_i} = \sigma_X, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10)$$

вычислим  $m_{\bar{X}}$ ,  $\sigma_{\bar{X}}$  и выясним, как они изменяются с увеличением  $n$ . Применяя теоремы о математическом ожидании и дисперсии суммы, получаем:

$$m_{\bar{X}} = M \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M \{X_i\} = \frac{1}{n} m_X n = m_X, \quad (11)$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma^2 \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right\} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 \{X_i\} = \frac{1}{n^2} n \sigma_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}, \quad (12)$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}. \quad (13)$$

Так, выяснилось, что

$m_{\bar{X}}$  (математическое ожидание среднего арифметического) — не зависит от числа измерений  $n$  и всегда равно  $m_X$ , а

$\sigma_{\bar{X}}^2$  — дисперсия (разброс) среднего арифметического неограниченно убывает с увеличением  $n$  и при достаточно большом  $n$  может сделаться сколь угодно малой.

Значит, случайная величина  $\bar{X}$  (среднее арифметическое) при большом числе измерений ведет себя почти как неслучайная.

Это свойство «устойчивости» среднего арифметического является еще одной формой проявления фундаментального «закона больших чисел» — основной теоретической базы всех методов обработки результатов измерений.

З а м е ч а н и е. Если  $\sigma$  ( $= \sigma_{X_i}$ ) понимать как среднюю квадратическую погрешность отдельного измерения ( $x_i$ ), а  $\sigma_{\bar{X}}$  — как среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического ( $\bar{X}$ ), то формула

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (14)$$

означает, что точность среднего арифметического  $n$  измерений в  $\sqrt{n}$  раз выше точности отдельного измерения — закон возрастания точности при возрастании числа измерений.

Таким образом, первый шаг математической обработки статистического ряда значений случайной величины  $X$  (случайного «показателя») с неизвестными  $m_X$  и  $\sigma_X$  состоит в вычислении их приближенных значений (оценок) по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{m}_X &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \\ \tilde{\sigma}_X^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m}_X)^2}{n-1}. \end{aligned}$$

Применительно к обработке результатов измерений постоянной величины  $x$  мы скажем, что  $\tilde{\sigma}$ , вычисленная по формуле

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}},$$

является точечной оценкой средней квадратической погрешности  $\sigma$  каждого из отдельных измерений, если предполагать их равноточными («точечной оценкой» точности измерительного прибора). Так как

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

то, заменяя параметр  $\sigma$  его оценкой  $\tilde{\sigma}$ , получим формулу для оценки ( $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ ) средней квадратической погрешности ( $\sigma_{\bar{x}}$ ) среднего арифметического:

$$\| \tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (15)$$

Если вычислены среднее арифметическое ( $\bar{x}$ ) измерений постоянной величины  $x$  и  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  и проверено, что прибор не дает систематической ошибки, то для результата принята такая запись

$$\| x = \bar{x} \pm \tilde{\sigma}_{\bar{x}}. \quad (16)$$

Например, пусть  $\bar{x} = 99,5$ , а  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = 0,6$ , тогда пишут:

$$x = 99,5 \pm 0,6.$$

**Сколько раз измерить?** Точность планиметра, с помощью которого вычисляют площадь, ограниченную замкнутой кривой, составляет 6%. Сколько раз надо повторить измерение площади, чтобы точность среднего арифметического полученных результатов была равна 2%?

**Решение.** Погрешность среднего арифметического равна

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ откуда } n = \left( \frac{\sigma}{\sigma_{\bar{x}}} \right)^2 = \left( \frac{6}{2} \right)^2 = 9 \text{ раз.}$$

**З а м е ч а н и е.** Не получается ли у нас так, что, увеличивая количество измерений, мы добьемся результата, неограниченно близкого к истинному значению измеряемой величины? Так думать — заблуждение. В действительности уменьшение среднего арифметического измерений ограничено некоторым постоянным числом, характеризующим «интервал чувствительности» прибора. Измеряющий должен знать эту предельную возможность своего прибора.

Образно сказал о том же знаменитый французский физик и математик А. Пуанкаре: «Измеряя длину одного метра хотя бы миллион миллионов раз, мы никогда не получим данную длину с точностью до одного микрона».

**Иногда аппаратуру дублируют.** Пробными испытаниями установлено, что относительная погрешность газоанализаторов данного типа равна 12%. Сколько дублирующих газоанализаторов надо поставить, чтобы обеспечить относительную погрешность результата в 10% и в 5%?

**Р е ш е н и е.** В соответствии с формулой (14)  $n_{10} = \left(\frac{12}{10}\right)^2 = 1,44$ ;  $n_5 = 5,76$ ; следовательно, надо поставить соответственно 2 и 6 газоанализаторов.

И здесь следует учитывать, что увеличение числа дублирующих аппаратов оправдывается лишь до тех пор, пока погрешность среднего арифметического измерений не снизится до «предела чувствительности» применяемых приборов.

### ЕСЛИ НЕ ЗНАЕМ С НЕСОМНЕННОСТЬЮ, ТО ЗНАЕМ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ

«Оценки» истинных, но неизвестных значений математического ожидания  $\tilde{m}_x$  (или  $\bar{x}$ ) и дисперсии  $\tilde{\sigma}_x^2$  случайной величины возникают на основе определенной серии случайных результатов прямых измерений, поэтому и сами они являются случайными результатами.

Возникает вопрос о мере доверия к получающимся оценкам.

Погрешности  $|m_x - \tilde{m}_x|$ ,  $|\sigma_x^2 - \tilde{\sigma}_x^2|$ ,  $|\sigma_x - \tilde{\sigma}_x|$  неизбежны, но не окажутся ли они в среднем недопустимо высокими?

В какой мере (с какой надежностью) можно доверять вычисленной «оценке»? Особенно в случае небольшого объема обрабатываемого статистического материала.

Согласимся считать «мерой доверия» оценке  $\tilde{m}_x$  вероятность  $\alpha$  того, что погрешность  $|m_x - \tilde{m}_x|$  не превысит приемлемой точности ( $\varepsilon$ ).

Доверие, разумеется, не следует обесценивать, поэтому значения  $\alpha$  должны быть достаточно близкими к 1, например, такими:

$$\alpha = 0,9, 0,95, 0,99, 0,999.$$

Мера точности  $\varepsilon > 0$  определяется неравенством

$$|m_x - \tilde{m}_x| < \varepsilon \quad (17)$$

или равносильным двойным неравенством

$$-\varepsilon < m_x - \tilde{m}_x < \varepsilon, \quad (18)$$

откуда

$$\| \tilde{m}_x - \varepsilon < m_x < \tilde{m}_x + \varepsilon. \quad (19)$$

Вероятность  $\alpha$  называется *доверительной вероятностью* или *надежностью* результата серии измерений; с мерой точности  $\varepsilon$  она связана равенством

$$\| \alpha = P(\tilde{m}_x - \varepsilon < m_x < \tilde{m}_x + \varepsilon). \quad (20)$$

Привлекая наглядность (рис. 60), можно сказать и так:  $\alpha$  есть вероятность того, что точка  $m_x$  будет н а к р ы т а случайным интервалом  $[\tilde{m}_x - \varepsilon, \tilde{m}_x + \varepsilon]$ .

Интервал  $[\tilde{m}_x - \varepsilon, \tilde{m}_x + \varepsilon]$  называется *доверительным интервалом*. Случайные концы этого интервала называются *доверительными границами*. Равенство (20) показывает, что с вероятностью, равной  $\alpha$ , оцениваемое  $m_x$  не выходит за пределы доверительного интервала:

$$[\tilde{m}_x - \varepsilon, \tilde{m}_x + \varepsilon]. \quad (21)$$

Равенство (20) предназначено для вычисления  $\varepsilon$  по за-

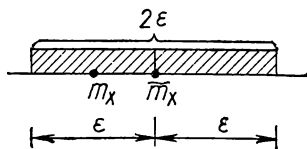


Рис. 60

данному  $\alpha$  или  $\alpha$  по заданному  $\varepsilon$ . С другой стороны, если потребуется организовать измерения с заданной достоверной вероятностью, то надо уметь определить количество требуемых измерений.

Естественно, что величина надежности  $\alpha$  будет зависеть от числа  $n$  произведенных измерений и от величины  $\varepsilon$ , если заранее намечены границы доверительного интервала.

### ПРИ $n > 20$

При большом числе измерений  $n$  ( $n \geq 20$ ) значение отдельного результата измерения не оказывает существенного влияния на величину  $\tilde{m}_x (= \bar{x})$ . А случайностям такого рода присуща закономерность, изученная известным русским математиком А. М. Ляпуновым:

если случайная величина формируется под воздействием большого числа независимых малых влияний, из которых ни одно не доминирует над остальными, то она подчинена нормальному распределению.

Случайную величину — «отклонение  $\tilde{m}_x$  от  $m_x$ » — для простоты обозначим так же, как и ее значение, т. е.

$$m_x - \tilde{m}_x.$$

Она подчинена нормальному распределению с математическим ожиданием, равным нулю, и средним квадратическим отклонением, равным  $\sigma_{\bar{x}}$ .

Вспоминая формулу (с. 174), выражающую вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный участок (в заданный интервал), получаем равенство для вычисления доверительной вероятности  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= P(-\varepsilon < m_x - \tilde{m}_x < \varepsilon) = P(\tilde{m}_x - \varepsilon < \tilde{m}_x < \tilde{m}_x + \varepsilon) = \\ &= \Phi^* \left( \frac{\tilde{m}_x + \varepsilon - \tilde{m}_x}{\sigma_{\bar{x}}} \right) - \Phi^* \left( \frac{\tilde{m}_x - \varepsilon - \tilde{m}_x}{\sigma_{\bar{x}}} \right) = \\ &= \Phi^* \left( \frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}} \right) - \Phi^* \left( -\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}} \right); \\ \alpha &= \Phi^* \left( \frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}} \right) - \Phi^* \left( -\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

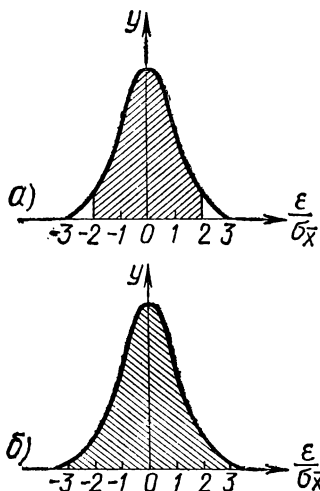


Рис. 61

Полезно иметь некоторые «эталоны» наглядных соотношений между доверительной вероятностью и доверительным интервалом. Такими «эталонами» считают обычно доверительные вероятности, вычисленные для  $\varepsilon = \sigma_{\bar{x}}$ ,  $\varepsilon = 2\sigma_{\bar{x}}$  и  $\varepsilon = 3\sigma_{\bar{x}}$ .

Выбирая, например,  $\varepsilon = 2\sigma_{\bar{x}}$ , получаем (по табл. на с. 173)  $\alpha = \Phi^*(2) - \Phi^*(-2) \approx 0,9772 - 0,0228 \approx 0,95$ .

На рисунке 61, а эта величина доверительной вероятности (надежности) изображена заштрихованной площадью под кривой нормального распределения величины

$m_x - \tilde{m}_x$  (вспомните: вся площадь под кривой равна 1).

Аналогично, выбирая  $\varepsilon = 2,58\sigma_{\bar{x}} (\approx 3\sigma_{\bar{x}})$ , вспомните правило «три сигма», получим  $\alpha = 0,99$  (рис. 61, б).

Значит, 95 шансов из 100 за то, что наше заключение, основанное на выборке результатов  $n$  измерений, будет иметь ошибку, не выходящую за пределы «двух сигма» влево и вправо от  $\tilde{m}_x$ ; 99 шансов из 100 за то, что абсолютная величина этой ошибки не превысит «трех сигма».

Встретив в учебнике физики фразу: «Масса нейтрального пи-мезона в  $264,2 \pm 0,5$  раза больше массы электрона», мы поймем теперь, что 264,2 есть среднее по результатам некоторого количества измерений  $n$ , но число  $n$  и дисперсия результатов (разброс около точки 264,2) таковы, что средняя квадратическая погрешность измерения оказалась равной 0,5.

Из правила записи обработанного результата измерений (16) следует, что  $0,5 = \sigma_{\bar{x}}$ . Так как  $n \geq 20$ , то можно считать, что и  $\sigma_{\bar{x}} \approx \tilde{\sigma}_{\bar{x}} = 0,5$ . Полагая  $\varepsilon = \sigma_{\bar{x}}$ , получим:

$$\alpha = \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right) - \Phi^*\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = \Phi^*(1) - \Phi^*(-1) \approx 0,68.$$

Значит, о качестве измерения массы пи-мезона мы можем дать такое заключение: с доверительной вероятностью  $\alpha = 68\%$  истинное значение массы пи-мезона принадлежит интервалу [263,7; 264,7].

Расширив интервал до  $2\sigma_{\bar{x}} = 2 \cdot 0,5 = 1$  влево и вправо от 264,2, можем сказать: с доверительной вероятностью 95% истинное значение массы пи-мезона принадлежит интервалу [263,2; 265,2].

Когда доверительный интервал слишком широк, существует два способа уменьшить его. Первый — увеличивать число измерений до тех пор, пока погрешность среднего арифметического не снизится до «предела чувствительности» измерительного прибора (см. замечание на странице 187). Второй — усилить контроль за тщательностью измерений, чтобы уменьшить погрешность в каждом отдельном результате.

При решении задачи, связанной с вероятностной мерой доверия к вычисленному приближенному значению  $\tilde{m}_x$  (или  $\bar{x}$ ) по заданному  $\sigma_{\bar{x}}$  (или  $\sigma_x$ ), может возникнуть такое отрицательное значение аргумента  $\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$  функции  $\Phi^*$ , которого нет в таблице, приведенной на странице 173, но есть значение, достаточно близкое к положительному числу  $\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$ . Для таких случаев удобнее другой вид формулы (22), который получим, пользуясь тождеством (6):

$$\Phi^*\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 1 - \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right).$$

Тогда

$$\alpha = \Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right) - \Phi^*\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right) = 2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}\right) - 1. \quad (23)$$

Если, кроме того, вспомним, что  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ , то получим еще одну разновидность выражения, характеризующего «надежность»

$\alpha = P(-\varepsilon < m_x - \tilde{m}_x < \varepsilon) = P(\tilde{m}_x - \varepsilon < m_x < \tilde{m}_x + \varepsilon)$ , а именно

$$\alpha = 2\Phi^*\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) - 1. \quad (24)$$



Опыты, связанные с измерениями значений исследуемой величины, нередко сложны и дороги. Как приблизиться к истине при небольшом объеме статистического материала? Мы достаточно много раз убеждались в своенравии случайности и тем труднее распознаваемом, чем меньшим числом его проявлений располагали.

При малом числе измерений вклад каждого из них оказывает существенное влияние на величину  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}^2$ , вычисляемую по формуле (15), и мы лишаемся оснований считать ее хорошей «оценкой» неизвестной дисперсии  $\sigma_{\bar{x}}^2$ , поэтому становится непригодной и таблица значений функции  $\Phi^*(t)$  для вычисления  $\alpha$  или  $\varepsilon$  из условия

$$\alpha = P (-\varepsilon < m_x - \tilde{m}_x < \varepsilon).$$

В 1908 г. английский химик и математик В. Госсет, публиковавший свои труды под псевдонимом «Стьюдент», установил закон распределения случайной величины

$$T = \frac{m_x - \tilde{m}_x}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}},$$

справедливый при любых  $n$ , если известно или есть основания допустить, что исследуемая случайная величина  $X$  подчинена нормальному закону распределения.

Практическим следствием этого открытия явилось изменение формул, дающих границы доверительного интервала для  $m_x$  (или для истинного значения измеряемой постоянной величины) при заданной надежности  $\alpha$ :

$$\left\| \tilde{m}_x - t_{\alpha, n} \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}}, \quad \tilde{m}_x + t_{\alpha, n} \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}}, \right. \quad (25)$$

где  $t_{\alpha, n}$  — так называемый *коэффициент Стьюдента*, зависящий от числа  $n$  произведенных измерений и от доверительной вероятности  $\alpha$ , а  $\tilde{\sigma}_{\bar{x}}$  определяется, как прежде (15).

Была обоснована рекомендация брать именно такие границы (25) доверительного интервала для  $m_x$  в случае *м а л о г о*  $n$ .

Для значений  $t_{\alpha, n}$ , соответствующих наиболее употребительным значениям надежности  $\alpha$  при  $2 \leq n < 20$ , составлена таблица (в справочниках приводится полная таблица).

| $n \backslash \alpha$ | 0,9  | 0,95  | 0,99  | 0,999  |
|-----------------------|------|-------|-------|--------|
| 2                     | 6,31 | 12,71 | 63,66 | 636,62 |
| 3                     | 2,92 | 4,30  | 9,92  | 31,60  |
| 4                     | 2,35 | 3,18  | 5,84  | 12,94  |
| 5                     | 2,13 | 2,78  | 4,60  | 8,61   |
| 8                     | 1,90 | 2,36  | 3,50  | 5,40   |
| 10                    | 1,83 | 2,26  | 3,25  | 4,78   |

**Пример 1.** Произведено 5 независимых измерений для определения заряда электрона и получены следующие результаты (в электростатистических единицах):

$$4,781 \cdot 10^{-10}; 4,795 \cdot 10^{-10}; 4,769 \cdot 10^{-10}; \\ 4,792 \cdot 10^{-10}; 4,779 \cdot 10^{-10}.$$

Определить «подходящее» значение для заряда электрона и найти доверительные границы при надежности 99%.

$$\text{Решение. } \bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i \approx 4,783 \cdot 10^{-10},$$

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 4} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \approx 0,0047 \cdot 10^{-10}.$$

По условию  $\alpha = 0,99$  и  $n = 5$ .

По этим данным находим в таблице  $t_{\alpha, n} \approx 4,60$ ;

$$t_{\alpha, n} \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}} \approx 4,60 \cdot 0,0047 \cdot 10^{-10} \approx 0,022 \cdot 10^{-10}.$$

Доверительный интервал

$$[4,761 \cdot 10^{-10}; 4,805 \cdot 10^{-10}] \text{ при } \alpha = 99\%.$$

**Пример 2.** Сделана выборка из 10 деталей, обработанных на токарном станке. Отклонения диаметров валика этих деталей от середины поля допуска оказались следующими:

| Номера деталей               | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Отклонения (X) размеров в мк | +2 | +1 | -2 | +3 | +2 | +4 | -2 | +5 | +3 | +4 |

Найти доверительную вероятность, с которой оценка математического ожидания отклонений, полученная по выборке, будет отличаться от его истинного значения по абсолютной величине не больше, чем на 2,1 мк.

**Р е ш е н и е.** Принимая нормальное распределение для отклонений, вычисляем:

$$\tilde{m} = \bar{x} = 2 \text{ мк}, \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 52, n - 1 = 9,$$

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{52}{10 \cdot 9}} \approx 0,76 \text{ мк}.$$

По условию  $\varepsilon = 2,1$ . Так как  $\varepsilon = t_{\alpha, n} \cdot \tilde{\sigma}_{\bar{x}}$ , то

$$t_{\alpha, n} = \frac{\varepsilon}{\tilde{\sigma}_{\bar{x}}} \approx \frac{2,1}{0,76} \approx 2,76.$$

В таблице ищем  $\alpha$  для  $n = 10$  и  $t_{\alpha, n} = 2,76$ .

Такого значения в таблице нет. Берем в строке, содержащей  $n=10$ , значения  $\alpha$  для тех  $t_{\alpha, n}$ , между которыми находится значение  $t_{\alpha, n} = 2,76$ .

| $t_{\alpha, n}$ | $\alpha$ |
|-----------------|----------|
| 2,26            | 0,95     |
| 2,76            | $\alpha$ |
| 3,25            | 0,99     |

Как всегда в подобных случаях (например, как при вычислении логарифма), составляем пропорцию (прием «линейной интерполяции»):

$$\frac{\alpha - 0,95}{2,76 - 2,26} = \frac{0,99 - 0,95}{3,25 - 2,26},$$

откуда  $\alpha = 0,97$ .

Следовательно, с доверительной вероятностью (или надежностью) 97% можно утверждать, что истинное математическое ожидание ( $m$ ) отклонений диаметров валликов от середины поля допуска лежит в интервале

$$[-0,1 \text{ мк}; 4,1 \text{ мк}].$$

## 5

### ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ — ЭТЮДЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИСПОЛНЕНИЯ

Чего не сделаешь терпением и трудом.

*И. А. Крылов*

**В** задачах, касающихся «выборки наугад», а также всюду, где нет ярко выраженных принципиальных оснований приписывать элементарным событиям неодинаковые вероятности, будем полагать элементарные события равновероятными.

Случайные события представлены задачами № 1 — № 33.

Случайные величины — задачами № 34 — № 40.

Интервальные «оценки» и доверительная вероятность — задачами № 41 — № 44.

1. Каждый из пяти играющих пишет на бумажке одну цифру — какую пожелает. Элементарное событие — комплект из пяти случайных цифр.

а) Сколько событий в пространстве элементарных событий?

б) Сколько элементарных событий составляют событие  $A$  — «в комплекте пяти случайных цифр нет совпавших»?

в) Найти вероятность события  $A$ , т. е.  $P(A)$ . **О т в е т:** а)  $10^5$ ; б)  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ ; в)  $P(A) = 0,3024$ .

2. В аквариум пущено 36 рыбок четырех видов поровну. По форме и размерам все рыбки одинаковы. Одну рыбку вытащили, выяснили, к какому виду она принадлежит, и вновь пустили в аквариум.

Через несколько минут еще раз вытащили одну случайно попавшуюся рыбку. Определить вероятность того, что обе эти рыбки принадлежат одному виду. **О т в е т:** 0,25.

3. В пакете находится несколько штук желтых и красных ягод черешни. Известно, что желтых ягод втрое боль-

ше, чем красных. Наугад берем из пакета одну ягоду. Какова вероятность того, что это будет красная черешенка?

О т в е т: 0,25.

4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь ровно две окрашенные грани? О т в е т: 0,096.

5. В ящике имеется 5 карточек с буквами О, П, Р, С, Т. Карточки вынимаются по одной и каждая последующая прикладывается к предыдущей. Найти вероятность того, что образуется слово «СПОРТ». О т в е т:  $\frac{1}{120}$ .

6. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры. О т в е т:  $\frac{1}{90}$ .

7. На рисунке 62 представлена электросхема. Введем события:

$A_i$  —  $i$ -й контакт замкнут,

$\bar{A}_i$  —  $i$ -й контакт разомкнут,

$B$  — лампочка горит,  $\bar{B}$  — лампочка не горит.

Выразить событие  $B$  и событие  $\bar{B}$  через события  $A_i$  и  $\bar{A}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

8.  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — три произвольных события. Выразить формулой событие, состоящее в том, что из  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

а) произошло только  $A$ ;

б) произошло  $A$  и  $B$ , но  $C$  не произошло;

в) все три события произошли;

г) произошло по крайней мере одно из этих событий;

д) произошло по крайней мере два события;

е) произошло одно и только одно событие;

ж) произошло два и только два события;

з) ни одно событие не произошло;

и) произошло не больше двух событий.

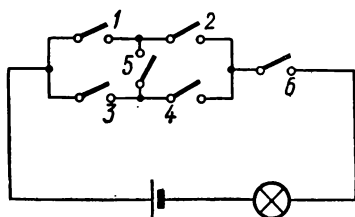


Рис. 62

О т в е т: а)  $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ ; б)  $A \cdot B \cdot \bar{C}$ ; в)  $A \cdot B \cdot C$ ; г)  $A \cup B \cup C$ ; д)  $A \cdot B \cup A \cdot C \cup B \cdot C$ ; е)  $A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cup \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} \cup \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$ ; ж)  $\bar{A} \cdot B \cdot C \cup A \cdot \bar{B} \cdot C \cup A \cdot B \cdot \bar{C}$ ; з)  $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$ ; и)  $\overline{A \cdot B \cdot C}$ .

9. По линии связи передается сигнал. Событие  $A$  — сигнал искажен на промежуточном пункте,  $B$  — сигнал искажен на конечном пункте. Расшифровать фразой «код» составного события:

а)  $A \cdot B$ ; б)  $\bar{A} \cdot \bar{B}$ ; в)  $A + B$ ; г)  $\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}$ ;  
д)  $A \cdot \bar{B}$ .

10. Доказать, что:

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}; \quad \overline{A \cdot B \cdot C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}.$$

11. Упростить  $(A + B) \cdot (A + \bar{B})$ . О т в е т:  $A$ .

12. Чему равна вероятность того, что у 12 человек дни рождения приходятся на разные месяцы? О т в е т:  $\frac{12!}{12^{12}}$ .

13. Из колоды карт (52 карты) Герман (опера «Пиковая дама») наугад извлекает три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз. О т в е т: 0,0029.

14. Два охотника одновременно увидели лису и одновременно выстрелили в нее. Предположим, что каждый из этих охотников на таком расстоянии обычно в одном случае из трех попадает в лису и убивает ее. Какова вероятность того, что лиса будет убита? О т в е т:  $\frac{5}{9}$ .

15. По линии связи, имеющей 4 прямо-передающих пункта, передается сообщение. На первом пункте происходит искажение сообщения с вероятностью 0,1. На каждом последующем пункте вероятность искажения возрастает на 0,05.

Какова вероятность получения неискаженного сигнала?

О т в е т: 0,459.

16. По каналу связи передается два сигнала: 0 и 1. Из-за наличия помех сигнал подвергается искажению с вероятностью 0,05 независимо от того, были ли подвергнуты искажению предшествовавшие сигналы или нет. Зная, что послан двоичный код (по системе счисления с основанием 2) 10110, найти вероятность того, что: а) код получен

без искажений; б) получена комбинация 01001; в) получена комбинация 11111. Ответ: а) 0,774; б)  $3,12 \times 10^{-7}$ ; в)  $2,14 \cdot 10^{-3}$ .

17. Электролампочки изготовляют два завода: 70% 1-й завод и 30% 2-й завод. Из 100 лампочек первого завода 83 стандартных, а из 100 лампочек второго завода 63 стандартных. а) Куплено 100 лампочек. Сколько из них стандартных? б) Куплена одна лампочка. Какова вероятность, что она стандартна и изготовлена на втором заводе? в) Купленная лампочка стандартна. Какова вероятность, что она изготовлена на втором заводе? Ответ: а) 77; б) 0,189; в) 0,245.

18. Радист трижды вызывает корреспондента, причем последующий вызов производится при условии, что предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,3, второй 0,4 и третий 0,5. Найти вероятность вызова корреспондента.

Ответ: 0,79.

19. Вероятность наступления после ясного дня опять ясного дня равна  $p_1$ , а пасмурного  $(1 - p_1)$ . Вероятность наступления после пасмурного дня снова пасмурного дня равна  $p_2$ , а ясного  $(1 - p_2)$ . Сегодня ясно. Какова вероятность того, что послезавтра будет: а) ясно? б) пасмурно?

Ответ: а)  $p_1^2 + (1 - p_1) \cdot (1 - p_2)$ ; б)  $(1 - p_1) \times (p_1 + p_2)$ .

20. Турист, идущий из пункта А, на разветвлении дорог выбирает наугад одну из них. Схема дорог изображена на рисунке 63. Какова вероятность того, что турист попадет в пункт В? Ответ:  $\frac{67}{120}$ .

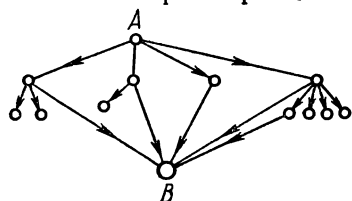


Рис. 63

21. В клубе 17 мест первого ряда предоставлены семнадцати лучшим ученикам выпускных классов нашей школы, в числе которых Ира К. и Боря К. Если эти места занимают случайным образом, то какова вероятность того, что Ира и Боря окажутся рядом?

Ответ:  $\frac{2}{17}$ .

22.  $n$  девочек и  $n$  мальчиков рассаживаются случайным образом в ряду из  $2n$  мест. Какова вероятность того, что никакие две девочки не ока-

жуются рядом? Чему равна вероятность того, что все девочки будут сидеть рядом?

О т в е т:  $\frac{(n+1)(n!)^2}{(2n)!}$ ;  $\frac{(n+1)(n!)^2}{(2n)!}$ .

23. 10 пассажиров случайным образом размещаются в трех вагонах. Какова вероятность того, что в один вагон сядет 6 человек, в другой — 3 человека и в третий — 1 человек? О т в е т:  $280 \cdot 3^{-9} (C_{10}^6 \cdot C_4^3 : 3^{10})$ .

24. В одной коробке находится 20 радиоламп, из них 18 стандартных, во второй коробке 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую.

Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной?

О т в е т:  $p = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9$ .

25. На разные клетки шахматной доски произвольным образом поставили две ладьи (белую и черную). Что вероятнее: окажутся ладьи под ударом друг друга или нет?

О т в е т. Вероятнее, что нет, так как вероятность этого  $\frac{64 \cdot 49}{64 \cdot 63} = \frac{49}{63}$ .

26. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2.

Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из шести телевизоров: а) не более одного потребует ремонта; б) хотя бы один потребует ремонта.

О т в е т: а) 0,6554; б) 0,7379.

27. По линии связи возможна передача кода 1234 с вероятностью 0,6 и кода 4321 с вероятностью 0,4. Код высвечивается на табло, которое может исказить цифры. Вероятность принятия 1 за 1 равна 0,8, а 1 за 4 равна 0,2. Вероятность принятия 4 за 4 равна 0,9, а 4 за 1 равна 0,1. Вероятность принятия 2 за 2 и 3 за 3 равна 0,7. Вероятность принятия 2 за 3 и 3 за 2 равна 0,3. Оператор принял код 4231. Определить вероятность того, что был передан код: а) 1234; б) 4321. О т в е т: а) 0,185; б) 0,815.

28. Два баскетболиста независимо друг от друга производят по 4 броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча в корзину соответственно равны 0,8 и 0,6. Определить вероятности того, что: а) у обоих баскетболистов будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий. О т в е т: а) 0,251; б) 0,6.



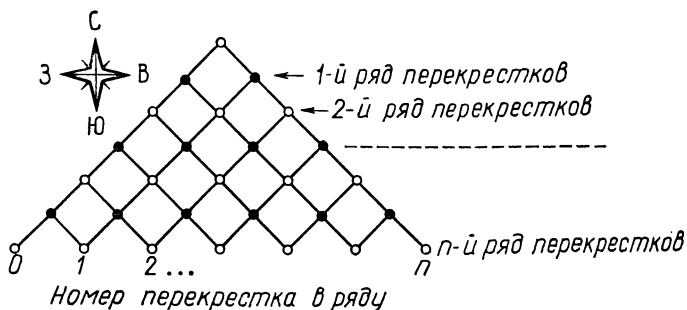


Рис. 64

29. 5 суворовцев пришли в гости и положили свои картузы на общую полочку в передней. Уходя, каждый из них взял картуз наудачу. Чему равна вероятность того, что каждый из них надел не свой картуз?

О т в е т:  $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = \frac{11}{30}$ .

30. Пункт  $A$  надо связать с 10 абонентами пункта  $B$ . Каждый абонент занимает линию 12 минут в час. Вызовы любых двух абонентов независимы. Какое минимальное количество каналов связи необходимо для того, чтобы можно было в любой момент с вероятностью 0,99 обслужить всех абонентов?

О т в е т:  $n = 5$ . У к а з а н и е. Должно быть

$$0,99 \cdot 5^{10} = 4^{10} + C_{10}^1 \cdot 4^9 + \dots + C_{10}^n \cdot 4^{10-n};$$

искомое  $n$  найти подбором.

31. В пункте  $O$  парка со схемой аллей, изображенной на рисунке 64, живет садовник, совершающий ежедневный путь вдоль аллей. Расстояние между перекрестками равно 1, а ежедневный деловой путь садовника составляет  $n$  единиц длины (обратный путь не учитывается). Он никогда не ходит на северо-запад или северо-восток, а на каждом перекрестке с вероятностью 0,5 поворачивает либо на юго-восток, либо на юго-запад. Какова вероятность попасть садовнику в конце обхода в  $k$ -й перекресток  $n$ -го ряда?

О т в е т:  $p = \frac{C_n^k}{2^n}$ .

32. а) Исходя из решения предыдущей задачи, вывести свойство сочетаний:  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$ .

б) Сохраняя условие предыдущей задачи, доказать, что вероятность попасть в нечетные перекрестки  $n$ -го ряда равна вероятности попасть в четные перекрестки  $n$ -го ряда. Какое свойство сочетаний отсюда следует?

У к а з а н и е. Число путей в  $n$ -й ряд перекрестков сравнить с числом путей, ведущих в  $(n - 1)$ -й ряд.

33. На двух столах положены по две коробки с конфетами. Коробки внешне одинаковы. На первом столе в одной коробке имеется одна конфета, а в другой — 7 конфет. На втором столе в одной коробке имеются 2 конфеты, а в другой — 5 конфет. Ребенок наудачу выбирает стол, а затем берет наудачу коробку с этого стола. После того как коробка выбрана, игра начинается сначала и повторяется  $n$  раз. Какой стол лучше выбирать, чтобы в среднем за  $n$  игр получить большее число конфет?

О т в е т. С первого стола за  $n$  раз ребенку достанется в среднем  $4n$ , а со второго — только  $3,5 n$  конфет.

34. Приготовьте два кубика с необычными числами очков на гранях: у одного — 0, 1, 2, 4, 5, 6, у другого — 1, 1, 1, 4, 4, 4. Первый кубик трижды кидаете вы, второй — трижды ваш друг.

Кто из вас должен в среднем чаще получать за три подбрасывания сумму очков, бо́льшую чем 9?

У к а з а н и е. Полезно доказать, что распределение сумм  $S_1$  и  $S_2$  для первого и второго кубиков симметричны одно относительно 9, другое относительно 7,5, а затем сравнить математические ожидания.

О т в е т. Вы, поскольку для первого кубика  $P(S_1 \geq 9) \geq 0,5$ , а для второго  $P(S_2 \geq 9) < 0,5$ .

35. Разрешается трижды бросить игральный кубик (1, 2, 3, 4, 5, 6) или кубик (1, 1, 1, 6, 6, 6). Каким кубиком лучше играть, чтобы с большей вероятностью набрать в сумме не менее 15 очков? Найти для обоих кубиков математическое ожидание и дисперсию суммы числа выпавших очков.

О т в е т. Вторым.  $M\{S_1\} = M\{S_2\} = 3 \cdot 3,5 = 10,5$ ;  
 $\sigma^2\{S_1\} = 3 \cdot \frac{35}{12} = 8,75$ ;  $\sigma^2\{S_2\} = 18,75$ .

36. На пути движения автомашины 2 светофора. Каждый из них либо разрешает с вероятностью 0,75, либо запрещает с вероятностью 0,25 дальнейшее движение. Найти закон распределения числа ( $X$ ) пройденных автомашиной

светофоров до первой остановки. О т в е т. Таблица распределения величины  $X$ :

|     |               |                |                |
|-----|---------------|----------------|----------------|
| $X$ | 0             | 1              | 2              |
| $p$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{9}{16}$ |

37. Производится набрасывание колец на колышек до первого попадания либо до полного израсходования всех колец, число которых равно пяти. Составить таблицу распределения случайного числа брошенных колец, если вероятность наброса равна 0,9.

О т в е т:

|       |     |      |       |        |        |
|-------|-----|------|-------|--------|--------|
| $x_i$ | 1   | 2    | 3     | 4      | 5      |
| $p_i$ | 0,9 | 0,09 | 0,009 | 0,0009 | 0,0001 |

38. При работе электронной вычислительной машины время от времени возникают неисправности (сбои). Поток сбоев можно считать пуассоновским. Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятности следующих событий:

$A$  — за двое суток не будет ни одного сбоя;

$B$  — в течение суток произойдет хотя бы один сбой;

$C$  — за неделю работы машины произойдет не менее трех сбоев.

О т в е т:  $P(A) \approx 0,050$ ;  $P(B) \approx 0,777$ ;  $P(C) \approx 0,998$ .

39. Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением 100 м. Найти: а) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м; б) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдет истинной.

О т в е т: а)  $P(|X| < 150) = 0,8185$ ;

б)  $P(-\infty < X < 0) = 0,6915$ .

40. Тело взвешивается на аналитических весах  $n$  раз. Истинное (неизвестное нам) значение веса тела равно  $m$ . Вследствие наличия ошибок результат каждого взвешивания  $X_i$  случаен. Все взвешивания производились в одинаковых условиях, следовательно, каждый результат  $X_i$  распределяется по нормальному закону с характеристиками  $m$  и  $\sigma$ , причем  $M\{X_i\} = m$  и  $\sigma^2\{X_i\} = \sigma^2$  при любом  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В качестве приближенного значения веса берут среднее арифметическое результатов  $n$  взвешиваний:

$$Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

а) Найти  $m$ . о. и с.к.о. случайной величины  $Y$ .

б) Сколько нужно сделать взвешиваний для того, чтобы  $\sigma\{Y\}$  было в 10 раз меньше  $\sigma$ ?

У к а з а н и е. Использовать свойства математического ожидания и дисперсии.

Ответ: а)  $M\{Y\} = m$ ,  $\sigma\{Y\} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ . б) По условию должно быть  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{10}$ , откуда  $n = 100$ .

41. Из большой партии электролампочек произвольно выбрали 400 штук для испытания на продолжительность горения. Средняя продолжительность горения лампочки оказалась 1220 ч.

Найти с доверительной вероятностью 0,99 математическое ожидание продолжительности горения лампочек во всей партии, если среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампочки равно 35 ч.

О т в е т: 1215,4 ч  $\div$  1224,6 ч.

42. Сколько зерен надо выбрать из партии зерна, чтобы с вероятностью 0,95 отклонение полученного в выборке среднего веса зерен от среднего веса зерен во всей партии не превышало 0,001 г?

Исследования в аналогичных условиях показали, что среднее квадратическое отклонение веса одного зерна для всей партии следует считать равным 0,05 г. (Закон распределения случайного веса зерен нормальный.)

О т в е т: 10 000.

**43.** В качестве подходящего значения дальности до цели принимают среднее арифметическое из результатов независимых измерений дальности  $n$  дальномерами. Измерения не содержат систематической ошибки, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратическим отклонением  $\sigma = 14,9$  м.

Сколько надо иметь дальномеров, чтобы абсолютная величина ошибки при определении дальности до цели с вероятностью 0,9 не превышала 15 м? О т в е т:  $n = 3$ .

**44.** При анализе содержания  $\text{SiO}_2$  в шлаке были получены следующие результаты: 28,6; 28,3; 28,4; 28,2. Найти оценку истинного содержания  $\text{SiO}_2$  в шлаке и точность оценки с доверительной вероятностью 0,95.

О т в е т:  $28,38 - 0,27 < x_{\text{SiO}_2} < 28,38 + 0,27$ .

### МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ И ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

**Принцип математической индукции.** Утверждение справедливо для всякого натурального  $n$ , если:

- 1) оно справедливо для  $n = 1$ ,
- 2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального  $n = k$  следует его справедливость для  $n = k + 1$ .

Доказательство, основанное на принципе математической индукции, называется доказательством *методом математической индукции*.

«Понимание и умение применять принцип математической индукции является хорошим критерием логической зрелости, которая совершенно необходима математику» (А. Н. Колмогоров).

**Вывод формулы числа перестановок:**  $P_n = n!$ .

- 1) При  $n = 1$  формула верна, так как  $P_1 = 1$ .
- 2) Пусть формула верна для какого-либо определенного натурального числа  $k \geq 1$ , т. е.  $P_k = k!$ .

Исходя из этого допущения, надо доказать, что и для следующего натурального числа  $n = k + 1$  справедливо равенство

$$P_{k+1} = (k + 1)!.$$

**Доказательство.** Возьмем одну из перестановок, содержащих  $k$  элементов  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Остальные перестановки из тех же элементов будут отличаться только порядком расположения элементов, а

полное число перестановок такого вида равно по предположению  $k!$ .

Возьмем еще один элемент  $a_{k+1}$  и поместим его сначала перед 1-м элементом каждой из имеющихся перестановок (получим, например,  $a_{k+1}a_1a_2 \dots a_k$ ), затем перед 2-м элементом (например,  $a_1a_{k+1}a_2 \dots a_k$ ) и т. д. и, наконец, после  $k$ -го элемента. Таким способом мы из одной перестановки, содержащей  $k$  элементов, получим  $k + 1$  перестановку по  $k + 1$  элементу в каждой, а всего

$$k! \cdot (k + 1) = (k + 1)!$$

перестановок из  $k + 1$  элементов.

Необходимо выяснить:

а) нет ли среди полученных  $(k + 1)!$  перестановок двух одинаковых?

б) все ли возможные перестановки из  $k + 1$  элементов нами получены?

а) Допустим, что есть; обозначим их  $P_1$  и  $P_2$ . Пусть в перестановке  $P_1$  элемент  $a_{k+1}$  занимает  $i$ -е место слева. Перестановки  $P_1$  и  $P_2$  одинаковы, значит и в перестановке  $P_2$  этот элемент ( $a_{k+1}$ ) занимает  $i$ -е место слева.

Удалим теперь этот элемент ( $a_{k+1}$ ) из  $P_1$  и  $P_2$ . Тогда и оставшиеся две перестановки, составленные из первоначально взятых  $k$  элементов, окажутся одинаковыми, а такие перестановки не могли образоваться при их составлении из  $k$  элементов по правилам построения перестановок. Возникшее противоречие означает, что предположение «допустим, что есть» следует отвергнуть.

б) Допустим, что возможна некоторая дополнительная, нами не полученная, перестановка  $P$  из  $k + 1$  элементов, в которой элемент  $a_{k+1}$  занимает  $i$ -е место слева. Удалим его из перестановки  $P$ . Останется перестановка из первоначально взятых  $k$  элементов; назовем ее  $P_1$ .

Значит, для получения перестановки  $P$  (в которой  $k + 1$  элементов) достаточно было взять перестановку  $P_1$  (в которой  $k$  элементов) и поместить на  $i$ -е место слева элемент  $a_{k+1}$ . Но обусловленная процедура присоединения элемента  $a_{k+1}$  к сформированным перестановкам из  $k$  элементов в том и состояла, что этот элемент мы ставили и первым, и вторым,  $\dots$ , и  $i$ -м, причем брали всевозможные перестановки из  $k$  элементов, в том числе и перестановку  $P_1$ .

Следовательно, составленные нами перестановки все различны, и всякая перестановка из  $k + 1$  элементов получена.

Таким образом, справедливость формулы

$$P_{k+1} = (k + 1)!$$

обоснована полностью.

Теперь, по индукции, формула  $P_n = n!$ , справедливая для  $n = 1$ , справедлива для  $n = 2$ , затем для  $n = 3$  и т. д., т. е. для любого натурального  $n$ .

**Вывод формулы числа сочетаний**  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

1) При  $m = 1$  формула верна, так как по определению сочетаний  $C_n^1 = n$  и по формуле

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-1)!} = n.$$

2) Допустим, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

и докажем справедливость равенства

$$C_n^{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

Для этого составим все сочетания из  $n$  элементов по  $k$  и к каждому из них присоединим в качестве  $(k + 1)$ -го элемента каждый из оставшихся  $n - k$  элементов.

Возьмем, например, сочетание из  $k$  элементов  $(a_2, a_3, \dots, a_{k+1})$  и присоединим элемент  $a_1$ , получим сочетание из  $k + 1$  элементов:  $(a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ . Назовем его  $C_{k+1}$ .

Теперь возьмем  $(a_1, a_3, \dots, a_{k+1})$  и присоединим элемент  $a_2$ . Вновь получим сочетание  $C_{k+1} = (a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$ .

Продолжая процедуру, мы, наконец, получим в  $(k + 1)$ -й раз одно и то же сочетание  $C_{k+1}$ , присоединяя элемент  $a_{k+1}$  к сочетанию  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ .

Пример показывает, что таким способом сформируются все сочетания из  $n$  элементов по  $k + 1$ , но каждое из них получится  $k + 1$  раз.

Таким образом,

$$C_n^k (n - k) = (k + 1) C_n^{k+1},$$

откуда

$$C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}.$$



### Вывод формулы разложения бинома $(a + b)^n$ .

Каковы бы ни были числа  $a$  и  $b$ , для любого натурального  $n$  имеет место формула

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

(бином Ньютона).

При  $n = 1$  имеем  $a + b = a + b$ , значит, при  $n = 1$  формула разложения бинома верна. Пусть

$$(a + b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1}b + C_k^2 a^{k-2}b^2 + \dots + b^k.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(a + b)^{k+1} &= (a + b)^k \cdot (a + b) = (a^k + C_k^1 a^{k-1}b + \dots + \\ &+ b^k) \cdot (a + b) = a^{k+1} + (1 + C_k^1) a^k b + (C_k^1 + C_k^2) a^{k-1} b^2 + \dots + \\ &+ (C_k^m + C_k^{m+1}) a^{k-m} b^{m+1} + \dots + b^{k+1}.\end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой  $C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1}$ , получаем:

$$(a + b)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + \dots + b^{k+1}.$$

### ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С ОБЩИМ ЧЛЕНОМ

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Рассмотрим сначала последовательность с общим членом

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

и докажем, что она убывающая.

Для любого натурального  $n > 1$   $(n - 1)$ -й член этой последовательности равен:

$$v_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n.$$

Образуем отношение:

$$\begin{aligned}\frac{v_{n-1}}{v_n} &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^n = \\ &= \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.\end{aligned}\quad (1)$$

Положим, что

$$1 + \frac{1}{n^2} = q,$$

и примем число  $q$  знаменателем прогрессии

$$1, q, q^2, \dots, q^{n-1}.$$

Известна следующая формула для суммы  $n$  членов геометрической прогрессии:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

В левой части этого равенства имеем  $n$  слагаемых, каждое из которых, начиная со второго, больше единицы. Уменьшая каждое из них до 1, получим неравенство

$$n < \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

или

$$n < \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1}{\frac{1}{n^2}},$$

откуда

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n > \frac{n+1}{n}. \quad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), получаем:

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}, \quad \text{или} \quad \frac{v_{n-1}}{v_n} > 1,$$

откуда

$$v_{n-1} > v_n,$$

а это значит, что последовательность  $\{v_n\}$  убывает.

Но снизу она ограничена хотя бы, например, нулем, так как все члены последовательности положительны, поэтому она имеет предел, который обозначим символом  $e$ .

Докажем теперь, что последовательность  $\{u_n\}$ , где

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

возрастающая.

Для любого  $n > 1$  имеем:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}. \quad (3)$$

Положим, что  $1 - \frac{1}{n^2} = q$ , где  $0 < q < 1$ .

Если теперь в левой части равенства

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

все слагаемые заменить единицами, то получим:

$$n > \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

или

$$n > \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{n^2}},$$

откуда

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > \frac{n-1}{n}. \quad (4)$$

Сопоставляя (3) и (4), получаем:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} > \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1}, \text{ или } \frac{u_n}{u_{n-1}} > 1,$$

откуда

$$u_n > u_{n-1}.$$

А это значит, что последовательность  $\{u_n\}$  возрастает.

Сопоставляя  $u_n$  и  $v_n$  для одних и тех же значений  $n$ , замечаем, что

$$u_n < v_n,$$

а для последовательности  $\{v_n\}$  мы доказали, что она имеет предел, названный нами числом  $\epsilon$ . Следовательно, возрастающая последовательность  $\{u_n\}$  ограничена сверху (числом  $\epsilon$ ), т. е. также имеет предел.

Докажем, что и пределом последовательности  $\{u_n\}$  является число  $\epsilon$ .

В самом деле, для любого натурального  $n$

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right] = \frac{1}{n} u_n. \text{ Так как } u_n < e, \text{ то} \\ v_n - u_n &< \frac{e}{n}. \end{aligned}$$

При неограниченном увеличении  $n$  величина  $\frac{e}{n} \rightarrow 0$ , следовательно, и  $v_n - u_n \rightarrow 0$ . А это значит, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

Из доказанного следует также, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (5)$$

Если произвольно принять, например,  $n = 6$  и взять среднее арифметическое чисел

$$\left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 \approx 2,5216 \text{ и } \left(1 + \frac{1}{6}\right)^7 \approx 2,9419,$$

то

$$e \approx \frac{2,9419 + 2,5216}{2} \approx 2,73.$$

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ДИСПЕРСИИ

**Т е о р е м а 1.**  $M\{X \cdot Y\} = M\{X\} \cdot M\{Y\}$ , если  $X$  и  $Y$  — независимые случайные величины.

Ограничиваясь только дискретными независимыми случайными величинами  $X$  и  $Y$ , определим их произведение как случайную величину  $X \cdot Y$ , возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения  $X$  на каждое возможное значение  $Y$ . Кроме того, вероятность совместного выполнения равенств  $X = x$ ,  $Y = y$  равна произведению вероятностей выполнения каждого из этих равенств (см. с. 130):

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y).$$

Пусть законы распределения  $X$  и  $Y$  таковы:

|     |       |       |
|-----|-------|-------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ |
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ |

|     |       |       |
|-----|-------|-------|
| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ |
| $p$ | $r_1$ | $r_2$ |

$$M\{X\} = x_1 p_1 + x_2 p_2$$

$$M\{Y\} = y_1 r_1 + y_2 r_2$$

Исходя из определения, составим закон распределения  $X \cdot Y$ :

|             |           |           |           |           |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $X \cdot Y$ | $x_1 y_1$ | $x_2 y_1$ | $x_1 y_2$ | $x_2 y_2$ |
| $p$         | $p_1 r_1$ | $p_2 r_1$ | $p_1 r_2$ | $p_2 r_2$ |

$$\begin{aligned} M\{X \cdot Y\} &= x_1 y_1 p_1 r_1 + x_2 y_1 p_2 r_1 + x_1 y_2 p_1 r_2 + \\ &\quad + x_2 y_2 p_2 r_2 = y_1 r_1 (x_1 p_1 + x_2 p_2) + \\ &\quad + y_2 r_2 (x_1 p_1 + x_2 p_2) = \\ &= (x_1 p_1 + x_2 p_2) (y_1 r_1 + y_2 r_2) = M\{X\} \cdot M\{Y\}. \end{aligned}$$

В общем случае, когда каждая случайная величина задана любым числом значений, доказательство аналогичное, только усложняется форма записи выполняемых действий.

**Т е о р е м а 2.**  $M\{X - m_X\} = 0$ ,  $X$  — случайная величина,  $m_X$  — ее математическое ожидание.

Докажем теорему для случая дискретной случайной величины  $X$ .

Пусть закон распределения ее вероятностей задан таблицей

|     |       |       |         |       |         |       |
|-----|-------|-------|---------|-------|---------|-------|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_i$ | $\dots$ | $x_n$ |
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_i$ | $\dots$ | $p_n$ |

Так как случайная величина  $X - m_X$  примет какое-либо значение  $x_i - m_X$  тогда и только тогда, когда случайная величина  $X$  примет значение  $x_i$ , то вероятность каждого значения  $x_i - m_X$  такова же, что и для  $x_i$ .

Таким образом, случайная величина  $X - m_X$  подчиняется следующему закону распределения:

$$\left\| \begin{array}{c} X - m_X \\ p \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1 - m_X \\ p_1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_2 - m_X \\ p_2 \end{array} \right\| \dots \left\| \begin{array}{c} x_n - m_X \\ p_n \end{array} \right\|.$$

По определению математического ожидания

$$M \{X - m_X\} = \sum_{i=1}^n (x_i - m_X) p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i - m_X \cdot \sum_{i=1}^n p_i.$$

Так как  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ , то

$$M \{X - m_X\} = \sum_{i=1}^n x_i p_i - m_X = m_X - m_X = 0.$$

**Теорема 3.**  $\sigma^2 \{X + Y\} = \sigma^2 \{X\} + \sigma^2 \{Y\}$ ,  
 $X, Y$  — независимые случайные величины.

Для доказательства теоремы воспользуемся одной из формул для вычисления дисперсии (с. 156):

$$\sigma^2 \{X\} = M \{X^2\} - [M \{X\}]^2.$$

В соответствии с этой формулой имеем:

$$\sigma^2 \{X + Y\} = M \{(X + Y)^2\} - [M \{X + Y\}]^2.$$

Раскроем скобки и воспользуемся теоремами о математическом ожидании суммы случайных величин и математическом ожидании произведения независимых случайных величин.

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma^2 \{X + Y\} &= M \{X^2 + 2XY + Y^2\} - [M \{X\} + \\ &+ M \{Y\}]^2 = M \{X^2\} + 2M \{X\}M \{Y\} + M \{Y^2\} - \\ &- [M \{X\}]^2 - 2M \{X\}M \{Y\} - [M \{Y\}]^2 = M \{X^2\} - \\ &- [M \{X\}]^2 + M \{Y^2\} - [M \{Y\}]^2 = \sigma^2 \{X\} + \sigma^2 \{Y\}; \\ \sigma^2 \{X + Y\} &= \sigma^2 \{X\} + \sigma^2 \{Y\}. \end{aligned}$$

По индукции теорема обобщается на любое число попарно независимых величин.

## ПОЧЕМУ ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНО СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ?

Пусть произведено  $n$  равнооточных измерений  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  случайной величины  $X$ . Вычисляем среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

и объявляем его приближенным значением величины  $X$ ,  $X \approx \bar{x}$ .

Но возможны и другие приближенные значения — любой из результатов измерений  $x$  или какое-либо иное среднее, например среднее геометрическое. Лучшим из приближенных значений принято считать то, сумма квадратов отклонений от которого для всех результатов измерений минимальна (так называемый *принцип наименьших квадратов*). Поэтому вычислим сначала сумму квадратов отклонений от среднего арифметического.

Пусть  $\omega_i$  есть отклонение  $i$ -го результата измерения  $(x_i)$  от  $\bar{x}$ :

$$\omega_i = x_i - \bar{x}.$$

Его квадрат равен:  $\omega_i^2 = x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2$ .

Придавая индексу  $i$  значения  $1, 2, \dots, n$ , получим  $n$  равенств:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= x_1^2 - 2x_1\bar{x} + \bar{x}^2, \\ \omega_2^2 &= x_2^2 - 2x_2\bar{x} + \bar{x}^2, \\ \omega_n^2 &= x_n^2 - 2x_n\bar{x} + \bar{x}^2.\end{aligned}$$

Будем складывать эти равенства «столбиком», тогда

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2.$$

Заменим  $\bar{x}$  равным выражением  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ :

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Приведя подобные члены, получим:

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2. \quad (1)$$

Возьмем какое-либо другое число в качестве приближенного значения величины  $X$ . Обозначим его  $m$ :

$$X \approx m.$$

Разность  $m - \bar{x}$  обозначим через  $r$ :

$$m - \bar{x} = r, \quad m = \bar{x} + r,$$

где  $r$  положительно, если  $m > \bar{x}$ , и отрицательно, если  $m < \bar{x}$ .

Рассмотрим отклонения  $d_i = x_i - m$ , или

$$d_i = x_i - (\bar{x} + r), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Производим вычисления, аналогичные предыдущим:

$$d_i^2 = x_i^2 - 2x_i(\bar{x} + r) + (\bar{x}^2 + 2\bar{x}r + r^2),$$

$$d_i^2 = x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i\bar{x} + r^2 - 2x_i r + 2\bar{x}r.$$

Складывая равенства, получаемые при  $i = 1, 2, \dots, n$ , будем иметь:

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + n\bar{x}^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + nr^2 - 2r \sum_{i=1}^n x_i + 2n\bar{x}r.$$

Заменяем  $\bar{x}$  равным выражением  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + n \cdot \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \frac{2}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + nr^2 - \\ &- 2r \sum_{i=1}^n x_i + 2rn \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + nr^2 - \\ &- 2r \sum_{i=1}^n x_i + 2r \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + nr^2. \quad (2) \end{aligned}$$



Сравнивая (1) и (2), замечаем, что первая сумма квадратов меньше второй на число  $nr^2$  при любом  $r$  (положительном или отрицательном). Это и значит, что сумма квадратов отклонений от средней арифметической (от  $\bar{x}$ ) меньше суммы квадратов отклонений от любого другого числа  $m$ , как большего, так и меньшего  $\bar{x}$ .

### ТЕОРЕМА ЧЕБЫШЕВА — ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Пусть имеется последовательность  $n$  попарно независимых случайных величин (дискретных или непрерывных)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  с математическими ожиданиями  $m_i = M\{X_i\}$  и дисперсиями  $\sigma_i^2 = \sigma^2\{X_i\}$ . Все дисперсии ограничены некоторой константой  $C$

$$\sigma_i^2 \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Теорема Чебышева устанавливает, что при достаточно больших  $n$  с вероятностью, близкой к 1, можно полагать, что среднее арифметическое случайных величин  $\left(\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)$  как угодно мало колеблется около постоянного числа  $\mu$ , являющегося средним арифметическим математических ожиданий данных случайных величин:

$$\mu = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_n}{n}.$$

Это значит, что при любом  $\varepsilon > 0$  и  $n \rightarrow \infty$

$$p_n = P\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\} \rightarrow 1, \quad (1)$$

иначе,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\} = 1.$$

**Доказательство.** Пусть неравенство

$$|\bar{X} - \mu| < \varepsilon \quad (2)$$

определяет некоторое событие. Умножим на  $n$  обе части неравенства (2). Получим равносильное ему неравенство

$$|n\bar{X} - n\mu| < n\varepsilon. \quad (3)$$

Преобразуем  $n\bar{X}$  и  $n\mu$ :

$$n\bar{X} = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$n\mu = m_1 + \dots + m_n = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Обозначим  $\sum_{i=1}^n X_i = X$ , тогда по свойству математического ожидания суммы имеем:

$$M\{X\} = M\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\} = \sum_{i=1}^n M\{X_i\} = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Теперь неравенство (3) принимает вид:

$$|X - M\{X\}| < \varepsilon n. \quad (4)$$

По-прежнему неравенства (4) и (2) равносильны. Согласно формуле «неравенство Чебышева» (с. 178) имеем:

$$P\{|X - M\{X\}| < \varepsilon n\} \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2 n^2},$$

или вследствие равносильности (4) и (2):

$$P\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2 n^2}. \quad (5)$$

В силу попарной независимости случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\sigma_X^2 = \sigma^2\left\{\sum_{i=1}^n X_i\right\} = \sum_{i=1}^n \sigma^2\{X_i\} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2,$$

а так как по условию теоремы каждое слагаемое этой суммы не превышает числа  $C$  ( $\sigma_i^2 \leq C$ ), то

$$\sigma_X^2 \leq nC. \quad (6)$$

Сопоставляя (5) и (6), отмечаем, что

$$P\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{n \cdot C}{\varepsilon^2 \cdot n^2},$$

или

$$P\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 \cdot n}. \quad (7)$$

При  $n \rightarrow \infty$   $\frac{C}{\varepsilon^2 \cdot n} \rightarrow 0$ , следовательно,

$$p_n = P\{|\bar{X} - \mu| < \varepsilon\} \rightarrow 1.$$

Теорема доказана. Более того, из (7) следует неравенство

$$p_n \geq 1 - \frac{C}{\varepsilon^2 n},$$

позволяющее оценить быстроту приближения  $p_n$  к 1 при  $n \rightarrow \infty$ .

#### ИЗ ТЕОРЕМЫ ЧЕБЫШЕВА — ТЕОРЕМА БЕРНУЛЛИ

Пусть вероятность наступления некоторого события  $A$  в  $n$  независимых испытаниях постоянна и равна  $p$ . Тогда разность между относительной частотой события  $\left(\frac{m}{n}\right)$  (которую можно оценить на основе выполненных испытаний) и вероятностью ( $p$ ) может быть сделана сколь угодно малой с вероятностью, близкой к 1, если число испытаний возрастает, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

$\varepsilon$  — постоянное положительное число (теорема Бернулли).

**Доказательство.** Положим, что каждая из  $n$  случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$  принимает только два значения: 1 — наступило событие  $A$  с вероятностью  $p$  и 0 — не наступило событие  $A$  с вероятностью  $q = 1 - p$ . Тогда

$$M\{X_i\} = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \sigma^2\{X_i\} = p \cdot q, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Так как сумма положительных  $p$  и  $q$  постоянна ( $p + q = 1$ ), то их произведение максимально при  $p = q$  (это известно из курса алгебры), в данном случае при  $p = q = \frac{1}{2}$ . Поэтому

$$\sigma^2 \{X_i\} = pq \leq \frac{1}{4}.$$

Если  $m$  — число успехов в  $n$  испытаниях, то

$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{m}{n}$  — относительная частота события  $A$ .

Все условия теоремы Чебышева выполнены, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{np}{n} \right| < \varepsilon \right\} = 1,$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Эта теорема с полной арифметической строгостью была доказана и самим Бернулли, но доказательство, основанное на теореме Чебышева, изящнее и проще. Главная же ценность схемы рассуждений, применяемой П. Л. Чебышевым, — в попутном получении неравенств, оценивающих близость к 1 вероятности отклонения относительной частоты события от его вероятности, случайной величины от ее среднего значения при любом конечном числе испытаний.

**Задачи.** Решить самостоятельно, пользуясь неравенством Чебышева.

1. Вероятность того, что денежный приемник автомата при опускании одной монеты сработает правильно, прием равной 0,95. Оценить вероятность того, что:

а) при 2500 опусканиях монет относительная частота случаев правильной работы автомата отклонится (по абсолютной величине) от вероятности 0,95 не более, чем на 0,02;

б) при 2000 опусканиях монет число случаев правильной работы автомата будет заключено в пределах от 1860 до 1940.

**Ответ:** а)  $\geq 0,9525$ ; б)  $\geq 0,941$ .

2. Сколько следует проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,98, можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты годных деталей от вероятности быть детали годной, равной 0,95, не превысит 0,01. О т в е т:  $\geq 23\,750$ .

## **ПОСЛЕСЛОВИЕ**

Хочется надеяться, что овладение содержанием книги укрепило вашу готовность к углубленному, систематическому изучению теории вероятностей и многочисленных ее приложений по учебникам и специальным книгам. Усвоенные и ставшие привычными понятия, методы, система вероятностного мышления — хороший трамплин для следующего прыжка. Только непременно «прихватите» с собой и умение дифференцировать и интегрировать функции, которому теперь учат в старших классах школы.

При работе над книгой автор руководствовался научно-методическими разработками А. Н. Колмогорова Б. В. Гнеденко и И. Г. Журбенко, Б. Е. Вейца, Л. Ф. Пичурина, опубликованными в журнале «Математика в школе», 1968, № 2, 3, 5, 6 и 1969 г., № 1.

Тем из вас, у кого эта прилежно прочитанная книга, быть может, разожгла интерес к теории вероятностей и ее приложениям, в большей мере, чем удовлетворила ненасытную любознательность, несомненно, доставят удовольствие и дополнительные познания следующие книги:

**Борель Э.** Вероятность и достоверность. «Наука», 1969.

Подробно, но без использования математического аппарата обсуждается содержание понятия вероятности. В небольшой книге охвачен почти весь спектр применений теории вероятностей в современном естествознании.

**Гнеденко Б. В.** Беседы о теории массового обслуживания. «Знание», 1974.

В форме коротких популярных бесед обсуждаются некоторые проблемы одного из молодых направлений прикладной математики — внедрение вероятностных и статистических методов в различные области сферы обслуживания. Брошюра отмечена дипломом I степени Всесоюзного общества «Знание».

**Дайменд С.** Мир вероятностей. «Статистика», 1970.

В соответствии с подзаголовком «Статистика в науке» в книге популярно раскрывается логика математико-ста-

тистических методов в экспериментальной работе. Живость языка книги и интересные примеры, преимущественно из области биологии, делают совершенно незаметными элементы сухой будничности, свойственной статистике. Юмор, к которому нередко прибегает автор, повышает интерес читателя к излагаемому предмету.

**Реньи А.** Письма о вероятности. «Мир», 1970.

Венгерский математик Реньи нашел превосходную беллетристическую форму освещения сложного процесса возникновения науки о случайных событиях, когда еще только зарождались первичные задачи, требующие новых понятий и новых подходов к их решению. В письмах, написанных от имени Паскаля, Реньи затрагивает вопросы применимости методов теории вероятностей к окружающему нас миру, не решенные полностью еще и до сих пор. Книга Реньи понятна каждому, кто умеет и любит читать вдумчиво.

**Савельев Л. Я.** Комбинаторика и вероятность. «Наука», 1975.

С обстоятельностью хорошего современного учебника изложены все необходимые для приложений комбинаторные приемы подсчета числа элементов в различных множествах. В формулировке определений, теорем и в рассмотрении примеров, относящихся к теории вероятностей, применен теоретико-множественный язык, принятый и в современных школьных курсах математики. Книга предназначена специалистам, нуждающимся в знании методов теории вероятностей. Она также полезна преподавателям и учащимся.

**Майстров Л. Е.** Теория вероятностей. Исторические очерки. «Наука», 1967.

По-видимому, это пока единственная книга, увлекательно ведущая читателей по календарю истории теории вероятностей от ее возникновения через периоды кризисов и подъемов вплоть до 30-х годов текущего столетия.

**Мостеллер Ф.** Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. «Наука», 1971.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

П р е д и с л о в и е (3)

ИГРА СЛУЧАЯ (введение) (5)

## 1. ПРОИЗОЙДЕТ ЛИ СОБЫТИЕ? МЕРА НАШЕЙ УВЕРЕННОСТИ (11)

Случайное блуждание (11)

Частица в лабиринте клеток (16)

«На кончике пера» (20)

Быть или не быть частице в круге? (22)

Формула действий (25)

Считаем вероятности (28)

Определите свою позицию (33)

Не надеясь на «авось» (35)

Мнимая загадочность в поведении трех игральных кубиков (36)

Что означает знак восклицания? (39)

Множество событий, называемое пространством (42)

Три основных постулата (46)

Контуры «решающего устройства» (50)

Конфликтные ситуации (51)

За кулисами своенравного случая (53)

Монета — генератор случайных чисел (59)

Треугольник Паскаля (60)

Дерево с числами на ветвях (65)

Три лица у одной формулы (69)

По разработанной технологии (73)

## 2. ПРИВЛЕКАЯ АЛГЕБРУ СОБЫТИЙ (80)

Слуга двух господ (80)

Либо дождик, либо снег (82)

И . . . И . . . Или . . . Или . . . — в серии примеров (83)

Экзамен нашей интуиции и (85)

Бывает и мечта вероятность меняет (89)

Декларация независимости (94)

Рассмотрим дела житейские (96)

- Объединение (сумма) совместных событий (101)
- Событие появляется  $m$  раз, не менее  $m$  раз (102)
- Великая теорема Ферма как задача теории вероятностей (109)
- Наилучшая стратегия игры (110)
- Наиболее вероятное число успехов (114)
- Бином Ньютона из формулы Бернулли (117)
- Немного о числе  $e$  и «законе редких явлений» (119)

### 3. ПОЛЕЗНЫЕ СРЕДНИЕ (123)

- Числовая функция на множестве элементарных событий (123)
- Распределяем вероятности: которому — сколько? (125)
- Отыскание «Центра» в хаосе разброса или «Среднее», называющее себя «математическим ожиданием» (133)
- Пять задач (136)
- Свойства математического ожидания (144)
- Уравнение для математического ожидания (146)
- Снова средняя квадратов (153)
- Малые вероятности с серьезными последствиями (159)
- «Нормальный» нрав случайности (164)

### 4. РАСЧЕТЛИВОЕ ДОВЕРИЕ (179)

- О чем рассказывают результаты измерения? (179)
- Устойчивость среднего арифметического (183)
- Если не знаем с несомненностью, то знаем с вероятностью (187)
- При  $n \geq 20$  (189)
- При  $n < 20$  (192)

### 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ—ЭТЮДЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИСПОЛНЕНИЯ (195)

### 6. ДОПОЛНЕНИЯ (205)

- Метод математической индукции и формулы комбинаторики (205)
- Предел последовательности с общим членом  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  (208)
- Некоторые свойства математического ожидания и дисперсии (211)
- Почему предпочтительно среднее арифметическое? (214)
- Теорема Чебышева — закон больших чисел (216)
- Из теоремы Чебышева — теорема Бернулли (218)
- Послесловие (220)



**БОРИС АНАСТАСЬЕВИЧ КОРДЕМСКИЙ**

**МАТЕМАТИКА  
ИЗУЧАЕТ СЛУЧАЙНОСТИ**

---

Спец. редактор *В. В. Аниселевич*

Редактор *С. В. Павельский*

Художник *В. Н. Юдкин*

Художественный редактор *Е. Н. Карасик*

Технический редактор *И. В. Квасницкая*

Корректор *Л. П. Михеева*



Сдано в набор 11/II 1975 г. Подписано к печати 25/VIII 1975 г.  $84 \times 108^{1/32}$ . Бумага тип. № 1. Печ. л. 7. Усл.-печ. л. 11,76. Уч.-изд. л. 10,46. Тираж 120 тыс.



Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Отпечатано с матриц Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината полиграфкомбинатом им. Я. Коласа Государственного комитета Совета Министров БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. г. Минск, Красная, 23, Заказ № 1952.

Цена 27 коп.